I. Orientations générales

1. Pourquoi ce document ?

1-1. La rénovation des enseignements en SEGPA

Afin de réaliser l'intégration de l'élève de SEGPA au collège rénové décrite dans l'introduction générale, il a semblé important d'apporter aux enseignants des informations sur les nouveaux programmes de mathématiques : ceux de 6e sont parus dans l'arrêté du 22 novembre 1995, ceux du cycle central (classes de 5e et de 4e) dans l'arrêté du 10 janvier 1997 ; quant à ceux de la classe de 3e, ils sont parus dans l'arrêté du 15 septembre 1998. Cette étape, utile pour en comprendre la cohérence, est un préalable indispensable en vue d'une adaptation aux difficultés spécifiques des élèves de SEGPA.

Compte tenu de l'ampleur d'une telle tâche, le choix a été fait de ne la conduire que sur deux des thèmes importants de ces programmes : la proportionnalité et les transformations géométriques.

1-2. Les raisons du choix des thèmes abordés

La présence de ces thèmes à tous les niveaux d'enseignement du collège témoigne de leur importance, et montre la volonté de programmer d'une manière assez fine leur enseignement sur une longue période.

La proportionnalité

Il est inutile d'insister sur le rôle important de ce thème dans la vie socio-professionnelle et dans celle du citoyen : pourcentages, statistiques, etc., le mettent en jeu quotidiennement pour comprendre le monde dans lequel nous vivons. Là réside la raison principale de ce choix ; les difficultés d'enseignement qu'il suscite en constituent une deuxième.

Yves Chevallard, précise[1] l'origine de ce mot : *«Pendant des siècles, il a existé dans nos sociétés toute une activité, diffusée par l'école, que nous pourrions décrire par l'expression* "pratiques autour de la proportionnalité". *Elle consistait, essentiellement, à résoudre une certaine catégorie de problèmes (scolaires mais aussi commerciaux et professionnels) que nous caractériserons rapidement par le type d'énoncé suivant :* "Si 3 donne 18, combien donne 5 ?". *On pourrait décrire ce genre d'activité comme la réalisation d'une activité standard constituée par un petit discours* ("3 est à 18 comme 5 est à x") *et par une équation écrite (3 : 18 :: 15 : x), équation qui se résolvait de façon extrêmement simple moyennant la règle suivante :* "l'inconnue étant l'un des extrêmes, on fait le produit des moyens et on le divise par l'autre extrême". *Et on aboutissait ainsi à la solution du problème (x = 18 x 5/3). Ainsi existait-il un dispositif stable, comprenant des objets discursifs et scripturaux très stéréotypés, sur lesquels on accomplissait certains gestes également stéréotypés. De ce système [...], qui a longtemps vécu dans nos sociétés et qui a cessé pratiquement de vivre aujourd'hui, il a émergé un objet qu'on a fini par appeler* "la proportionnalité", *emblème qui renvoyait pendant le XVIIIe et le XIXe siècle à un ensemble de pratiques sociales qui, d'une certaine façon, pouvaient s'identifier à celles décrites ci-dessus. Or, la disparition progressive de ces pratiques – ou leur évolution vers de nouvelles formes d'activité – n'a pas entraîné avec elle la disparition de l'emblème* "proportionnalité" *qui, par le biais de la langue courante, imprégnait la culture de tous les jours. Il explique ensuite qu'on a alors fait de ce mot* "une réalité première, essentielle et éthérée" *: le* "concept" *de proportionnalité. Une certaine idéalité s'est ainsi mise à vivre culturellement. [...] Ainsi entendra-t-on dire aujourd'hui qu'on peut posséder ou ne pas posséder le "concept de proportionnalité", qu'on*

1. Dans l'article intitulé «Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique», DidaTech, *«didactique et technologies cognitives en mathématiques», Laboratoire de structures discrètes et de didactique, séminaires 1991-1992, université Joseph Fourier, Grenoble.*

pourra exprimer ou utiliser moyennant certains symboles, discours ou actions. On oublie en cela que c'est bien à travers ces discours, ces écritures et ces gestes, et aussi à travers les activités où ceux-ci apparaissent, que se constitue l'objet "proportionnalité".»

En fait, le mot «proportionnalité» ne renvoie pas à une notion, un concept mathématique, mais à des pratiques de résolution de problèmes, mettant en œuvre de tels concepts. Pour illustrer ces propos, qui peuvent paraître déconcertants, Yves Chevallard décrit une pratique de résolution, très rarement utilisée, qu'il illustre avec le traitement du petit problème suivant : «Si 3 cahiers coûtent 18 F, combien coûtent 5 cahiers». Il procède ainsi :

> Soit f(x) le prix de x cahiers. On sait que f(3) = 18, et on cherche f(5).
> Or, f est linéaire donc, puisque 5 = 5/3 x 3, f(5) = 5/3 f(3) = 5/3 x 18 = 30.
> Donc, 5 cahiers coûtent 30 francs.

Dans cette façon de faire, il utilise un objet mathématique, la fonction linéaire f (ainsi que des écritures qui y sont attachées), que les élèves apprennent à l'heure actuelle au début du lycée. C'est d'ailleurs avec ce type d'écritures (ou, pour mieux traduire le fait que ces écritures servent à «faire» en même temps qu'à «exprimer», d'outils sémiotiques), que l'on interprétera et justifiera mathématiquement les principales procédures utilisables pour traiter les problèmes de proportionnalité[2], avant de préciser les attentes à cet égard des nouveaux programmes.

2. Voir la partie II relative à la proportionnalité dans les propositions de trames et de situations, paragraphe 1-3, page 28.

Après avoir évoqué le savoir à enseigner, intéressons-nous à l'élève et à ses productions. Toujours dans le même article, Yves Chevallard évoque un exemple très parlant : *«Soit, par exemple, un élève qui proposerait la solution suivante au problème précédent :*

> *3 = 18*
> *1 = 18 : 3*
> *5 = 5 x 6 = 30*
> *donc, 5 cahiers coûtent 30 francs.*

Dira-t-on de lui qu'il ne comprend pas ce qu'il fait ? Et que ce qu'il écrit est d'ailleurs aberrant ? Ne doutons pas que, pour lui comme pour nous, 3 n'est pas égal à 18, ni 1 à 6, ni 5 à 30 ! Voyons ici une activité qui, simplement, ne peut se réaliser convenablement (du point de vue mathématique au moins) ***faute d'un outil essentiel dont ne dispose pas encore l'élève*** *(qui se sert alors d'un objet qu'il connaît déjà : le signe =). [...] L'objet manquant est ici [...] la lettre* ***x*** *qui, en association avec d'autres objets, permettra qu'émerge et se stabilise l'objet* "équation".

Il ne sera pas étonnant, en outre, qu'un élève ne sachant pas résoudre le problème précédent résolve convenablement celui-ci :

> *Si 4 bonbons coûtent 2 francs, combien coûtent 6 bonbons ?*

Cet élève, en effet, disposera dans ce cas d'un outil de travail extrêmement simple, mais suffisant, [...] qui permet de dire, ***et donc de faire****, ce qui suit :*

> *2 est la moitié de 4, donc 6 bonbons coûtent la moitié de 6,*
> *c'est-à-dire 3 francs.*

Cet outil de travail ne permet pourtant de s'attaquer qu'à un nombre très réduit de problèmes de proportionnalité. Le travail des mathématiciens consiste à créer d'autres [...] outils de plus en plus adéquats à l'activité mathématique. Des outils de travail qu'il faudra apprendre à manipuler et dont il faut savoir et pouvoir se servir.»

Les transformations géométriques

Le thème de la proportionnalité est commun à deux des trois rubriques du programme de mathématiques à chacun des niveaux : celles ayant pour titres respectifs «Travaux numériques» et «Organisation et gestion de données – Fonctions». Pour aborder la troisième, intitulée

«Travaux géométriques», un thème s'impose facilement, celui des transformations géométriques (en géométrie plane).

Ces transformations constituent un moyen de comparer entre elles des figures géométriques (figures que l'on peut superposer par glissement seulement, ou par glissement et retournement, c'est-à-dire les figures congruentes, plus communément appelées «égales» – qui n'a jamais entendu parler des fameux cas d'**égalité** des triangles ?).

La dynamique d'enseignement/apprentissage envisagée par les programmes semble particulièrement adaptée aux élèves de SEGPA. À chaque niveau, une transformation est étudiée : la symétrie axiale en 6e, la symétrie centrale en 5e, la translation en 4e et la rotation en 3e. À chaque fois, l'étude comporte essentiellement les étapes suivantes :

– action de la transformation sur des figures, cette action étant rendue visible par l'emploi d'un dispositif expérimental (pliage, papier calque, objet technologique, etc.) ;
– dégagement des propriétés géométriques conservées par la transformation au cours de ces «actions» (conservation des distances, de l'alignement de points, des angles, etc.) ;
– étude des figures que la transformation conserve globalement (figures ayant des côtés de longueurs égales, des angles ayant même mesure, c'est-à-dire figures présentant «des régularités») ;
– caractérisation de ces figures à l'aide de leurs «éléments de symétrie», et nouveaux modes de construction de telles figures (triangle isocèle, rectangle, losange, carré, parallélogramme, polygones réguliers).

1-3. À propos de la résolution de problèmes

Les programmes de mathématiques, dans leur rubrique «Finalités et objectifs», évoquent à plusieurs reprises la «Résolution de problèmes». Afin d'éviter des quiproquos, il convient de bien clarifier les différentes places que l'on peut accorder à la résolution de problèmes suivant la «stratégie d'enseignement» adoptée par le professeur pour provoquer l'apprentissage chez ses élèves.

- Dans les méthodes dites **«traditionnelles»**, le problème intervient essentiellement comme critère d'apprentissage, comme moyen d'évaluer : après la leçon, viennent les exercices pour s'entraîner, puis les problèmes pour appliquer.
- Dans les méthodes dites **«actives»**, le problème est utilisé comme mobile de l'apprentissage, comme motivation. Pour engager un nouvel apprentissage, il faut motiver l'activité de l'élève, faire en sorte que celui-ci soit demandeur de connaissances nouvelles.
- Dans les méthodes dites **«par adaptation»** ou encore **«constructivistes»**, c'est l'activité de résolution de problème qui est centrale. Si le problème est également source et critère de l'apprentissage, l'activité de résolution est utilisée comme lieu, comme moyen de l'élaboration du savoir.

C'est à cette dernière méthode, et au problème parfois évoqué par la locution «situation-problème», qu'est consacré le paragraphe suivant.

Les parties 2, 3 et 4 du I ont pour but, d'une part, de fournir des éléments du cadre théorique dans lequel les situations d'enseignement proposées dans la partie II ont été construites, et d'autre part, de mettre en évidence dans ce cadre certaines spécificités des élèves de SEGPA. Selon ses préférences, le lecteur peut choisir entre les deux scénarios de lecture suivants :

– lire d'abord le cadre théorique, puis les réalisations de situations d'enseignement qui s'y réfèrent ;

– lire d'abord les exemples, et s'intéresser ensuite au cadre : dans ce dernier cas, le lecteur peut aborder directement le II.

2. Hypothèses relatives à l'enseignement/apprentissage

2-1. L'apprentissage par adaptation

Depuis une vingtaine d'années, la plupart des recherches relatives à l'enseignement des mathématiques se placent dans le cadre de ce qu'il est convenu d'appeler le «modèle constructiviste» de l'enseignement/apprentissage.

Ce modèle s'oppose à la fois à la conception «de la tête vide» – selon laquelle il s'agit de remplir la tête de l'élève en respectant le principe suivant : ce que le professeur énonce clairement sera bien conçu par l'élève – et à la conception «des petites marches» qui repose sur l'idée que, pour faire passer l'élève d'un niveau de connaissances à un autre, il suffit de lui aménager un certain nombre d'étapes intermédiaires, chacune d'elles comportant une petite difficulté, dont la taille est présumée suffisamment petite pour que l'élève puisse aisément la franchir.

L'élaboration de ce modèle a subi l'influence du psychologue Jean Piaget et de l'épistémologue Gaston Bachelard. Il repose sur **plusieurs hypothèses**.

- D'abord, l'acquisition de connaissances passe par l'action de l'élève : «c'est en agissant que l'on apprend». Le terme «action» est utilisé dans le sens de résolution de problèmes, et pas uniquement d'action sur des objets matériels.
- D'autre part, on étend ce que dit Bachelard à propos de l'évolution des connaissances en physique – *«on connaît contre une connaissance antérieure, en détruisant des connaissances mal faites»* – au développement des connaissances mathématiques pour un élève au cours du processus d'enseignement/apprentissage.

Guy Brousseau, créateur de la «théorie des situations», illustre ainsi cette hypothèse[3] : *«Un enfant peut comprendre les premiers mesurages à l'aide du comptage, appréhender les propriétés de l'ordre des nombres à l'aide du mesurage, contrôler des opérations à l'aide de l'ordre* ("ça grandit, donc il ne faut pas diviser") *ou d'une autre opération (multiplier, c'est ajouter un certain nombre de fois), comprendre le comptage grâce à des opérations (treize, c'est dix plus trois) ou à la recherche de successeurs [...] toutes les relations possibles, vraies dans les entiers sont bonnes pour donner du sens. [...] Pour l'élève, ces propriétés sont celles des nombres en général, de tous les nombres. Or, le prolongement de l'ensemble des naturels dans un sur-ensemble comme les rationnels ou les décimaux, en même temps qu'il fait apparaître des propriétés nouvelles en fait disparaître certaines autres ; elles ne sont plus vraies pour tous les nombres, ou même elles ne le sont pour aucun : multiplier peut rapetisser, un décimal n'a plus de successeur [...]. Cette situation conduit l'enseignant à provoquer des quiproquos et l'élève à commettre des erreurs. Ces conceptions fausses persistent car elles sont attachées à une certaine manière de comprendre les propriétés des nombres naturels, et on peut observer les effets de la rupture pendant de très longues années. Plus important encore est le mécanisme de cet obstacle : ce sont, non pas les connaissances enseignées qui font défaut – en général, les enseignants pourvoient à cet inconvénient en essayant de se maintenir dans un discours incompris mais correct –, ce sont les instruments personnels de la compréhension de l'élève. Il ne comprend plus, parce que ce qui devrait être changé ce sont justement les moyens de ce qu'il appelait* "comprendre" *jusque-là.».*

3. *Voir l'article «Utilité et intérêt de la didactique pour un professeur de collège», revue* Petit x, *n° 22, 1989-90, repris dans la revue* Grand N, *n° 47, 1990-91, pp. 93 à 114.*

Ainsi, certaines connaissances (que l'on appelle parfois représentations ou conceptions erronées) se constituent en **obstacles** face à l'apprentissage de connaissances nouvelles, et sont à l'origine d'erreurs durables. L'apprentissage ne se fait pas par empilement de connaissances : tant que l'élève ne prend pas conscience du caractère erroné de certaines de ses connaissances, il les gardera. Apprendre, comme le dit Hameline, c'est tout autant perdre des connaissances anciennes qu'en acquérir de nouvelles.

- Enfin, l'élève n'arrivera à donner du sens à une connaissance que si elle lui apparaît comme un outil indispensable pour résoudre un problème qu'il s'est approprié.

2-1. Tâches de l'enfant dans la famille, travail de l'élève et travail de l'adulte

L'école se définit par un certain type d'attentes à l'endroit de l'individu (l'élève de l'école élémentaire, l'élève de SEGPA, etc.) qui distingueront cette position d'élève de sa position d'enfant dans la famille. Lorsque, dans cette dernière, l'un des parents demande à un enfant d'exécuter une tâche (aller chercher quelque chose dans la cuisine), l'enfant apparaît comme un instrument permettant de réaliser l'action qu'on lui commande : nous qualifierons d'**instrumentale** l'injonction à laquelle il est soumis. Dans la classe, lorsque le maître pose à un élève une question relative au savoir enseigné, l'injonction n'est pas instrumentale au sens précédent. En effet, le maître ne demande pas à l'élève «combien font 2 fois 8 ?» pour connaître le résultat mais pour vérifier que l'élève, lui, le sait. L'injonction dans la classe, à propos du savoir enseigné, est une **injonction didactique**. Chez les jeunes élèves, il faut du temps pour que la nature toute particulière de ce type d'injonction soit reconnue. L'enfant ne se sent pas exposé, comme en témoignent les doigts levés, avant que la totalité de la question soit posée. Les familles ne préparent pas toujours l'enfant à cette discipline, à cette rigueur. Distinguer le jeu auquel on joue, se distinguer dans ce jeu sont des conditions nécessaires pour que l'enfant devienne un élève.

Dans leur enquête relative aux enjeux de savoir dont l'école est ou non porteuse, Bautier, Charlot et Rochex[4] montrent que, pour de nombreux élèves, le rapport des élèves à l'école est construit sur le modèle du rapport de leurs parents au travail. On fait son travail pour qu'il soit fait. Comme le dit Alain Mercier[5], *«il est donc essentiel de montrer à ces élèves que l'enjeu de toute activité scolaire est didactique. Le travail n'est pas donné pour qu'il soit fait, mais pour qu'en cherchant à le faire l'élève rencontre une occasion d'établir un rapport à un nouvel objet, ou un rapport nouveau à un objet ancien, ou encore de nouvelles interrelations entre des objets précédemment connus.»* Sinon, *«l'élève n'apprend guère plus que le travailleur au quotidien : tout au plus peut-on dire qu'il gagnerait en expérience et c'est ce que les observateurs de l'enseignement des mathématiques aux élèves en difficulté observent unanimement : cette* "expérience professionnelle" *des élèves n'est pas transférable, transmissible, objectivable sous la forme de rapports à des objets de savoir».*

Savoir se soumettre à l'injonction didactique, c'est être capable de trouver sa place dans le **contrat didactique**.

4. Charlot B., Bautier E. et Rochex J.-Y, Savoir et École dans les banlieues... et ailleurs, *Armand Colin, collection «Formation des enseignants», 1993.*

5. Voir son article dans Différents types de savoirs et leur articulation, *La pensée sauvage, collection «Travaux et thèses de didactique», 1995.*

2-3. Contrat didactique et partage de l'intention d'enseigner

Dans toute situation didactique *«se noue une relation qui détermine – explicitement pour une petite part, mais surtout implicitement – ce que chaque partenaire, l'enseignant et l'enseigné, a la responsabilité de gérer et dont il sera, d'une manière ou d'une autre, comptable devant l'autre. Ce système d'obligations réciproques ressemble à un contrat. Ce qui nous intéresse ici est le contrat didactique, c'est-à-dire la part de ce contrat qui est spécifique du* "contenu" : *la connaissance mathématique visée[6]».* Guy Brousseau, en étudiant ce contrat, a découvert des phénomènes comme le glissement métadidactique. Voici la description qu'il en donne : *«Lorsqu'une tentative d'enseignement échoue, l'enseignant est parfois conduit à reprendre son texte pour l'expliquer et le compléter. De moyen d'enseignement, cette première tentative devient objet d'étude, éventuellement même objet d'enseignement ; la forme se substitue au fond.»*

6. Brousseau G., «Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques», in Recherches en didactique des mathématiques, *Volume 7.2, pp. 33 à 115, 1986.*

Dans une enquête conduite à l'IREM de Marseille[7], Claude Castella relève *«un phénomène de sur-normalisation institutionnelle des élèves de SES, plus sensibles aux rites de fonctionnement de la classe, plus dépendants vis-à-vis de la norme scolaire. […] Cependant, cette sur-normalisation cache un profond affaiblissement du rapport personnel au savoir mathématique. Le temps de la classe apparaît aussi, pour l'élève de SES, celui où s'apprend l'institution scolaire dans ses rites, ses emblèmes, où se mettent en place les gestes du métier d'élève mais où le savoir mathématique reste peu présent».* Pour faire évoluer cette situation, elle plaide *«pour la mise en place, dans les classes de SES, de réelles activités mathématiques».*

7. Castella C., Coppola J., Graziani J., Lefeez R., Mercier A., «Enquête sur l'enseignement des mathématiques en éducation spécialisée», publication de l'IREM d'Aix-Marseille, n° 20, 1995.

2-4. L'algorithmisation : refuge et échec ?

Guy Brousseau poursuit ainsi : *«Devant les difficultés et les incompréhensions de nombreux élèves dans l'utilisation de connaissances simples, force est de constater l'échec (de l'élève, de l'enseignement, de la méthode, du programme...) et de demander une focalisation (de l'élève, de l'enseignement, etc.) sur ce que l'on sait le mieux définir, évaluer et enseigner : les algorithmes, c'est-à-dire sur ce qui est peut-être le moins en défaut ; l'élève sait faire une division, mais ne sait pas quand il faut en faire une.»* Le professeur négocie le contrat à la baisse, et les élèves passent à côté du savoir. La technique qui peut se montrer reste la seule enseignée. L'élève doit exécuter son travail, puis répéter, toujours à l'identique, l'exécution réussie (comme le font les adultes dans certains métiers). Comme le remarque Alain Mercier[8], il acquiert ainsi une expertise, qui s'accompagne d'une réduction de l'action : bientôt, il n'écrit plus ce qui montrait «ce qu'il y a à faire», il se contente de faire, et n'écrit souvent que le résultat final. Il ne se soumet donc plus à l'injonction didactique telle qu'elle était fixée par le professeur.

8. Cf. note 6.

2-5. Conditions pour l'élaboration d'une bonne situation

Nous reprenons partiellement le contenu d'un article[9] consacré à cette question.

- L'élève doit pouvoir s'engager dans la résolution du problème. Il doit pouvoir y engager certaines de ses connaissances antérieures.
- Les connaissances de l'élève sont en principe insuffisantes pour qu'il résolve le problème.
- La situation doit permettre à l'élève de décider si une réponse trouvée est bonne ou mauvaise, et ceci, sans que le professeur intervienne.
- La connaissance visée doit être l'outil le plus adapté à la résolution du problème : cela exige de la part du professeur une analyse *a priori* dont le but est de prévoir les procédures (exactes mais aussi erronées) que l'élève peut utiliser face au problème.

Il convient de préciser d'emblée qu'il ne s'agit pas de systématiser l'emploi de telles situations, et ceci, pour plusieurs raisons :

– pour certaines notions, il est difficile d'en élaborer ;

– la gestion de la classe est plus complexe ;

– la mise en place et la conduite d'une telle situation demande un temps assez long.

On n'envisagera donc de telles situations que pour des notions nouvelles particulièrement importantes, et pour lesquelles de telles situations ont déjà été mises au point.

9. Mante M., «Autour de la notion de situation-problème», in Bulletin Inter-IREM, *Suivi scientifique 1985-1986, Nouveaux programmes de 6^e, pp. 232 et 233.*

3. Comment construire des situations ?

3-1. Niveau de complexité

Il convient de mettre les élèves face à une situation créant un vrai problème. Par exemple, un problème dans lequel on donne le prix unitaire d'un objet et où l'on demande de trouver le prix d'un certain nombre de ces objets ne peut être le support d'une situation relative à l'enseignement de la «proportionnalité» – le savoir qu'on y engage ne concerne que la multiplication par un nombre entier –, pas plus que le petit problème évoqué plus haut : *«Si 4 bonbons coûtent 2 francs, combien coûtent 6 bonbons ?»*, problème que l'élève sait immédiatement résoudre, compte tenu des nombres qui y figurent. De même, en géométrie, une activité sur papier quadrillé dans laquelle il s'agit de dessiner la symétrique d'une figure par rapport à un axe «horizontal» ou «vertical» ne conviendra pas comme support d'une situation-problème relative à l'enseignement de la symétrie orthogonale en 6e : pour de nombreux élèves, cette situation n'est plus problématique.

3-2. Variables didactiques

Une variable didactique est une donnée du problème (la taille d'un ou de plusieurs nombres, la place d'un nombre par rapport à 1, la place dans la feuille de papier de l'axe de la symétrie, etc.) ou un élément de consigne (autorisation ou non d'utiliser une calculatrice, tel ou tel instrument pour tracer : règle, équerre, compas, etc., ou pour mesurer : double décimètre, rapporteur, etc.) dont la variation va provoquer une modification dans le choix des procédures de résolution employées par les élèves.

Par exemple, dans un exercice d'agrandissement d'une figure, on voit bien que le choix du coefficient 2 permet à l'élève d'engager des procédures qui ne seront plus utilisables avec un coefficient égal à 1,75.

On saisit immédiatement le parti que le professeur peut tirer de l'emploi judicieux d'une variable didactique. Sa manipulation pourra permettre de confronter d'abord les élèves à une variante du problème dont ils pourront se saisir et qui soit facile à résoudre à l'aide de leurs connaissances antérieures, puis dans un second temps de les confronter à une variante qui soit aussi facile à saisir mais dont la résolution sera pour eux véritablement problématique.

3-3. Rétroaction de la situation sur les productions des élèves

Il convient que la situation soit aménagée de telle manière que les élèves aient à leur disposition un moyen (calculatrice, contrôle par pliage pour la symétrie axiale, plus généralement, un moyen lié au dispositif matériel, etc.) qui leur permet d'évaluer les réponses qu'ils élaborent, et ceci sans que le maître ait à intervenir (ce dernier doit d'ailleurs refuser à ce sujet les sollicitations des élèves). Il ne s'agit pas d'une coquetterie de sa part : le but est de faire en sorte que la relation qui s'est établie entre l'élève et le problème, donc avec certains savoirs, ne soit pas détournée au profit d'une idée que l'élève se fait des intentions du maître. Cette volonté pour le professeur de s'effacer momentanément en tant que «personne qui juge de la qualité d'une production d'élève» est à l'origine du qualificatif «a-didactique» que l'on attribue à de telles situations.

Cette contrainte n'est pas facile à réaliser. Lorsqu'on ne peut pas l'atteindre, le professeur peut éviter d'avoir à donner lui-même la «bonne réponse» en recueillant les productions des élèves (aussi bien celles qui sont bonnes que les autres) et en les mettant en débat dans la classe.

4 - Comment gérer une situation ?

4-1. La dévolution ; l'engagement des élèves dans la tâche

Cette étape est évidemment essentielle. Elle a pour but que le problème tel qu'il a été communiqué par le professeur devienne véritablement un problème que l'élève se pose à lui-même. Il convient donc que l'énoncé en soit suffisamment clair, et que les connaissances antérieures des élèves leur permettent d'engager des procédures, de pouvoir essayer «quelque chose», de ne pas «sécher» dès le début.

4-2. Le non-engagement du professeur dans la validation des productions des élèves

Cette condition est tout aussi essentielle. Sinon, il vaut mieux en général que le professeur fasse un cours de type classique auquel les élèves sont habitués : en effet, en cas d'intervention trop hâtive du professeur, les élèves n'acceptent plus le jeu tel qu'il leur a été présenté au départ ; ils ne s'investissent plus dans la recherche, attendant du professeur d'autres indications, et cherchant en priorité à se conformer à ses attentes qu'il a imprudemment commencé à dévoiler. De plus, ce comportement compromet fortement la réussite ultérieure de la dévolution d'autres situations-problèmes : ayant été «piégés» une fois, les élèves ne veulent plus courir le risque de l'être une deuxième.

4-3. La prise en compte des erreurs

L'avantage de cette façon de procéder réside dans le fait que l'élève se rend compte tout seul (la situation a été aménagée dans ce but) du caractère erroné de certaines de ses productions. Il ne perçoit donc plus l'erreur comme une faute – qui sera relevée par le professeur. Ce dernier sait que cette erreur est la manifestation d'une connaissance mal faite, qui s'est constituée en obstacle. Cela ne veut pas dire qu'il ne doit pas évoquer publiquement ces erreurs : au contraire, il convient qu'il provoque un débat à leur sujet, de manière à dégager les raisons pour lesquelles ces procédures sont fausses. Par exemple, dans l'agrandissement d'une figure où un segment qui mesure 4 cm doit devenir un segment en mesurant 7, beaucoup d'élèves vont construire la figure obtenue (avec quelques aménagements) en ajoutant 3 cm à chacune des dimensions – on a là la manifestation de ce que Gérard Vergnaud appelle un «théorème en actes» qui dirait «agrandir c'est ajouter». Ces élèves auront pu se rendre compte expérimentalement et par eux-mêmes que cette procédure est erronée. Le professeur, après avoir confronté les procédures utilisées, et dégagé une ou plusieurs procédures exactes, va-t-il en rester là ? Certainement pas : il va devoir dégager le fait que l'idée d'ajouter quelque chose à chacune des dimensions n'est pas en soi mauvaise, mais que ce qu'il faut ajouter à une dimension dépend de cette dimension, au lieu d'être toujours la même longueur de 3 cm.

4-4. Action - Formulation - Validation

L'engagement des élèves dans la tâche problématique se fait d'abord dans l'**action**, qui ne se réduit pas à la manipulation d'objets matériels. Ils peuvent manipuler aussi des objets mathématiques par le biais des outils sémiotiques qui leur sont associés (écritures en ligne d'opérations, calcul mental, opérations posées, emploi de la calculatrice, etc.).

La deuxième dimension est celle de la formulation, qui a pour but de décrire, par écrit et à destination d'un tiers, ce que l'on vient de faire et de ce fait de prendre un peu de distance par rapport à l'action, en la dépersonnalisant. Cette étape est cruciale pour les élèves en difficulté : si on les en dispense – comme c'est souvent le cas compte tenu de leurs difficultés d'expression, notamment la première fois qu'on les confronte à une telle exigence – on les met davantage encore en difficulté, en les privant d'un moyen de représenter leur action, afin de pouvoir isoler et mémoriser cette action pour une reconduction ultérieure.

La troisième dimension est celle dans laquelle on juge de la validité et de l'efficacité des procédures précédemment formulées.

4-5. L'institutionnalisation : le savoir et les outils sémiotiques

Cette étape, que l'on peut présenter comme inséparable des trois précédentes, est tout à fait fondamentale ; elle est placée sous la responsabilité du professeur. C'est lui qui va désigner ce qui, parmi les nombreuses connaissances manipulées dans la résolution du problème, va être nommé publiquement et qui de ce fait va devenir un savoir que l'on va définir, et pour lequel on va indiquer des notations officielles, des façons de les prononcer oralement, ainsi que des façons d'utiliser ces écrits et ces paroles dans certaines pratiques de résolution.

Le mot «étape» utilisé ci-dessus pour décrire l'institutionnalisation peut prêter à confusion si on lui associe l'idée d'unité temporelle : en effet, l'institutionnalisation a lieu en des moments différents, séparés dans le temps. Il faut également lui associer le moment de routinisation des connaissances, d'entraînement dans la pratique des tâches, qui deviennent ainsi des tâches routinières après avoir été des tâches problématiques. C'est seulement à ce moment-là que l'on atteint l'automatisation des procédures, bien utile pour diminuer la charge mentale dans les résolutions de problèmes.

4-6. Les situations de rappel

Marie-Jeanne Perrin a particulièrement travaillé dans sa thèse[10] la question de l'institutionnalisation dans des classes majoritairement composées d'élèves en difficulté. Elle a identifié un type de situations qu'elle a appelées «de rappel» qui permettent à la fois une institutionnalisation locale et une dévolution après coup de l'enjeu d'une ou plusieurs situations rencontrées précédemment par les élèves. *«Les situations de rappel de type 1 se placent peu après une situation d'action, mais un autre jour, se distinguant ainsi du bilan. En essayant de dire collectivement ce qui s'est passé, quel problème a été traité, les élèves sont amenés à repenser le problème, les procédures de traitement envisagées dans la classe. Les élèves qui ne se sont pas construit de représentation mentale lors de la phase d'action trouvent là une occasion nouvelle et une raison de le faire puisqu'ils vont devoir parler de ce qui s'est passé et le décrire sans pouvoir agir à nouveau. D'une part, il se produit une dépersonnalisation des solutions dans la mesure où elles sont reprises et exposées par d'autres élèves que ceux qui les ont trouvées, d'autre part, [un début de décontextualisation] en reprenant à froid ce qui s'est passé, on élague les détails pour identifier ce qui est important. [...] Les situations de rappel de type 2 portent sur une suite de problèmes sur un thème, par exemple la symétrie orthogonale. Chacun des problèmes traités est alors intégré dans un processus, il est intériorisé avec un sens nouveau. Au cours d'une telle situation, les formulations évoluent, on peut avoir des retours sur des débats de validation qui ont déjà eu lieu ou rencontrer la nécessité de nouveaux.»*

10. Perrin-Glorian M.-J., Aires de surfaces planes et nombres décimaux. Questions de didactique liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6e*, Thèse de Doctorat d'État, université Paris VII, février 1992.*

II. Propositions de situations ou de trames

1. Thème 1 : la proportionnalité

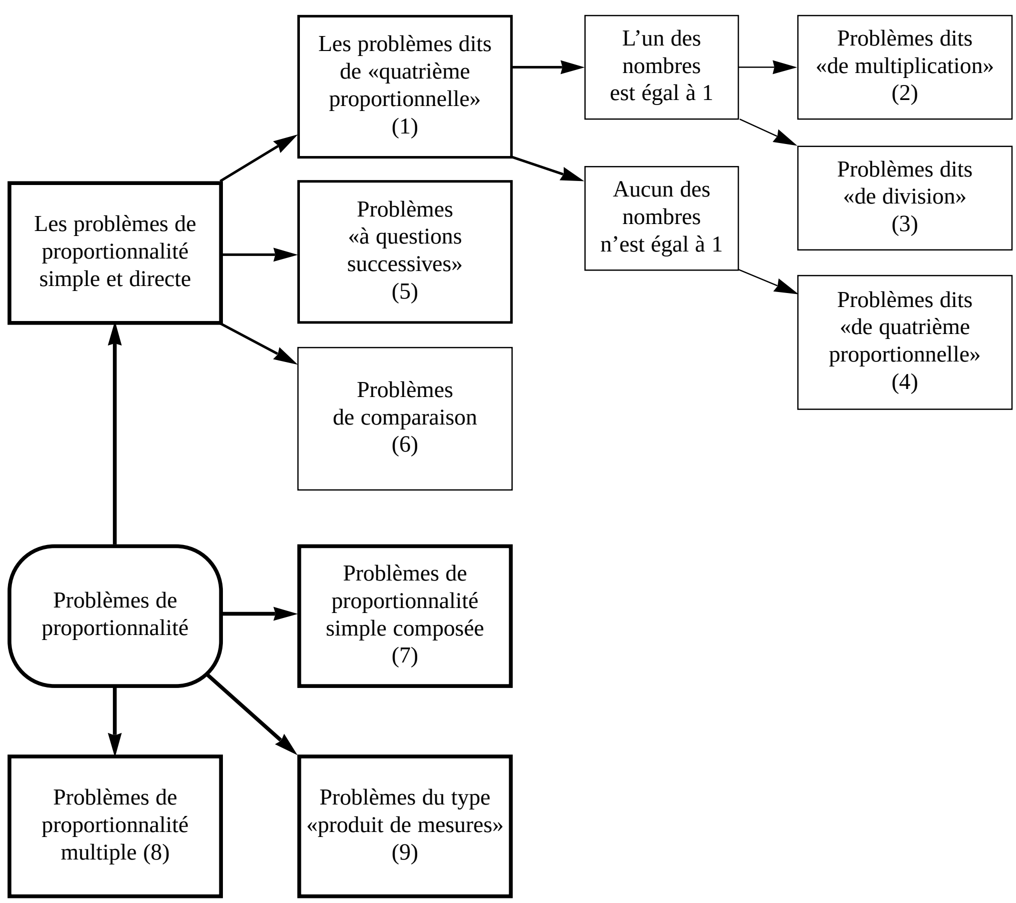
Dans le paragraphe 1-2. consacré au choix des thèmes, nous avons souligné que celui de la proportionnalité ne renvoie pas à un concept, mais plutôt à un champ de problèmes, auquel sont associés des procédures de résolution et des outils sémiotiques très variés. Du point de vue de l'enseignement, ce thème se caractérise par la longue période sur laquelle il est enseigné et par le fait que cet enseignement est entamé à l'école élémentaire et se poursuit tout au long du collège. Avant d'en venir aux situations d'enseignement, il convient, sur un sujet aussi vaste et aussi complexe, de mettre un peu d'ordre, en dressant d'abord un inventaire des types de problèmes figurant dans le champ de la proportionnalité, avant d'aborder les procédures de résolution et les outils sémiotiques utilisés pour une grande classe de problèmes, celle mettant en jeu des grandeurs mesurables.

1-1. Les différents types de problèmes intervenant dans le champ conceptuel des structures multiplicatives

Nous allons les présenter à l'aide d'un graphique, puis nous illustrerons et commenterons ensuite rapidement certains d'entre eux[11]. Cette classification doit beaucoup à Gérard Vergnaud[12].

11. Les exemples sont pris dans Ermel, CM1, Hatier, 1997.

12. Et notamment à son ouvrage : L'Enfant, la mathématique et la réalité, *Éditions Peter Lang, Berne, 1983.*



(1) Les problèmes dits «de quatrième proportionnelle»

Ces problèmes tirent leur nom du fait qu'ils consistent à déterminer le quatrième terme d'une proportion dont les trois premiers sont donnés.

- *Exemple : 4 dictionnaires identiques pèsent 10 kg. Combien pèsent 14 dictionnaires ?*

Premier cas : l'un des trois nombres connus est égal à 1

On a affaire alors aux problèmes dits «de multiplication» ou «de division».

(2) Problèmes dits «de multiplication»

- *Exemple 1 : En rangeant ses photos de vacances dans son album, Jean a rempli 12 pages de 8 photos. Combien Jean a-t-il rangé de photos dans son album ?*
- *Exemple 2 : Jean possède 15 F. Marc a trois fois plus d'argent que Jean. Combien Marc possède-t-il d'argent ?*

Signalons simplement ici que, dans ces deux cas, le nombre 1 n'apparaît pas explicitement dans l'énoncé, et que ces deux exemples ne privilégient pas la même relation. Nous y reviendrons dans le paragraphe suivant, relatif aux procédures de résolution et outils sémiotiques.

(3) Problèmes dits «de division»

Ces problèmes se répartissent en deux catégories : ceux dans lesquels il s'agit de calculer «la valeur d'une part», et ceux dans lesquels il s'agit de calculer «le nombre de parts».

- *Exemple 1 (recherche de «la valeur d'une part») : Pendant les vacances, Jean a fait 96 photos. Pour les ranger, il les met dans son album. En mettant toujours le même nombre de photos par page, il a rempli 12 pages de son album. Combien de photos a-t-il mis sur chacune des pages de son album ?*
- *Exemple 2 (recherche «du nombre de parts») : Pendant ses vacances, Jean a fait 96 photos. Pour les ranger, il les met dans son album en mettant toujours 8 photos par page. Combien de pages d'album remplira-t-il avec toutes ces photos ?*

(4) Deuxième cas : aucun des nombres donnés n'est égal à 1

On a alors affaire aux problèmes auxquels on réserve usuellement le nom de «problèmes de quatrième proportionnelle».

- *Exemple : 4 dictionnaires identiques pèsent 10 kg. Combien pèseraient 6 dictionnaires ?*

(5) Les problèmes «à questions successives»

Il s'agit du même type de problème que le précédent, mais ici on demande de déterminer plusieurs «quatrièmes proportionnelles».

- *Exemple : Sachant que 100 g de fromage coûtent 8 F, quels sont les prix des quantités suivantes de fromage : 200 g, 450 g, 75 g, 375 g ?*

(6) Les problèmes de comparaison

Il s'agit de problèmes dans lesquels interviennent deux parties composant un tout.

- *Exemple 1 (comparaison partie – partie) : Dans la bouteille A, je mets 4 verres d'eau et 2 morceaux de sucre et dans la bouteille B, je mets 12 verres d'eau et 8 morceaux de sucre. Quel est le sirop le plus sucré, celui de la bouteille A ou celui de la bouteille B ?*
- Exemple 2 (comparaison partie – tout) : Dans une classe de 20 élèves, 12 élèves déclarent aimer le foot. Dans une autre classe de 30 élèves, il y a 15 élèves qui

déclarent aimer le foot. Y a-t-il une classe dans laquelle on aime plus le foot que dans l'autre ?

(7) Problèmes de proportionnalité simple composée

Il s'agit de problèmes faisant intervenir la composition de deux ou plusieurs relations de proportionnalité simple.

- *Exemple : Avec 100 kg de blé, on fait 75 kg de farine et avec 25 kg de farine, on fait 30 kg de pain. Quelle est la masse de blé nécessaire pour faire 450 kg de pain ?*

(8) Problèmes de proportionnalité multiple

Il s'agit de problèmes mettant en œuvre une grandeur G qui dépend de plusieurs grandeurs G1, G2, etc., et qui est proportionnelle à chacune d'elles lorsque toutes les autres sont fixées.

- *Exemple : Supposons que les élèves d'une classe soient en train de préparer une classe de neige pour 50 enfants, pendant 28 jours. Comment calculer la consommation de sucre nécessaire, sachant qu'il faut compter 3,5 kg de sucre par semaine pour 10 enfants ?*

(9) Problèmes du type «produit de mesures»

C'est un cas particulier du type de problème précédent.

- *Exemple 1 (produit cartésien) : Julie a 3 tee-shirts et 4 pantalons différents. De combien de manières différentes peut-elle s'habiller ?*
- *Exemple 2 (aire du rectangle) : L'aire du rectangle est proportionnelle à la largeur quand la longueur est fixée, et à la longueur quand la largeur est fixée. En choisissant convenablement les unités, c'est ce dont rend compte la formule $A = L \times l$.*

1-2. Description des procédures de résolution et des outils sémiotiques utilisés dans leur enseignement

Conformément à ce qui a été annoncé plus haut (paragraphe 1-2. du I), nous allons dans un premier temps décrire, rendre intelligible à l'aide d'un exemple chacune des procédures les plus usuelles dans le traitement des problèmes de proportionnalité. Puis, dans un deuxième temps, dans un paragraphe séparé et intitulé «À propos de l'enseignement de la procédure...», nous préciserons, selon les niveaux du système d'enseignement, les prescriptions des programmes – lorsqu'elles existent – ou habitudes en matière d'enseignement de ces procédures et des outils sémiotiques associés. Enfin, dans un troisième temps, nous évoquerons la justification de la procédure du point de vue mathématique, en utilisant des outils actuellement enseignés au niveau de la classe de 3e ou de la classe de 2de.

La question étant très vaste, comme le paragraphe précédent l'a montré, nous traiterons essentiellement des problèmes où interviennent des grandeurs mesurables. Ceci nous permettra cependant d'aborder les modes de traitement des types de problèmes suivants :

- les problèmes de «quatrième proportionnelle» (n° 1 et n° 4 sur le schéma), et notamment ceux relevant du premier cas, dans lequel **l'un des trois nombres connus est égal à 1**, les problèmes dits «de multiplication» (n° 2 sur le schéma) et les problèmes dits «de division» (n° 3 sur le schéma). La résolution de ces derniers est encore en cours d'acquisition pour de nombreux élèves de SEGPA ;
- les problèmes «à questions successives» (n° 5 sur le schéma) dont nous verrons l'intérêt aussi bien pour le professeur que pour les élèves.

Procédure 1

Cette procédure prend en compte les relations entre les nombres **relatifs à une même grandeur. Elle privilégie les relations de type additif.**

Mise en œuvre sur un exemple

9 croissants coûtent 35,55 F ; 6 croissants coûtent 23,70 F.
Combien coûtent 15 croissants ?

15 croissants, c'est la même chose que «9 croissants + 6 croissants». Donc, le prix de 15 croissants s'obtient en additionnant ceux de 9 croissants et de 6 croissants.

Dans la mise en œuvre de cette procédure, les **outils sémiotiques** utilisés relèvent de deux types principaux :

– l'utilisation d'un **mélange de langue naturelle et d'opérations en ligne**, comme dans :

15 = 9 + 6.
35,55 + 23,70 = 59,25 (l'opération étant posée par ailleurs)
Donc 15 croissants coûtent 59,25 F.

– l'utilisation d'un **tableau avec opérateurs** tels que celui-ci :

nombre de croissants	9	6	15
prix en F des croissants	35,55	23,70	59,25

À propos de l'enseignement de la procédure 1

À l'école primaire, la procédure 1 est beaucoup travaillée. On l'utilise dans des problèmes «à questions successives» dont l'énoncé est aménagé de façon à disposer de données plus riches : il faut, en effet, disposer d'au moins deux couples de mesures correspondantes pour pouvoir l'engager. Elle permet de réinvestir les «décompositions additives» de nombres entiers (un nombre c étant donné, il s'agit de trouver des couples (a, b) de nombres tels que $c = a + b$) qui ont été beaucoup travaillées antérieurement.

Remarque :

La portée de cette procédure est en apparence très limitée. Nous allons voir dans le paragraphe suivant comment elle peut être agrandie, en considérant, pour enrichir les décompositions additives de nombres, des multiples ou diviseurs de nombres donnés.

Justification du point de vue mathématique

Du point de vue mathématique, on traduit l'idée de correspondance à l'aide du concept de fonction, souvent désigné par la lettre f, le correspondant par f d'un nombre x étant désigné par $f(x)$. Par exemple, si a (kg de viande) coûtent $f(a)$ (francs), et b (kg de viande) coûtent $f(a)$ (francs), $a + b$ (kg de viande) coûtent $f(a + b)$ (francs). Autrement dit : $f(a + b) = f(a) + f(b)$.

Une fonction f vérifiant la propriété :
pour tous nombres a *et* b, $f(a + b) = f(a) + f(b)$
est dite **additive**.

L’intérêt de cette propriété dans la résolution de problèmes est le suivant :

Si j’ai à calculer le prix de *c* (kg de viande), et si je dispose de deux nombres *a* et *b* tels que $c = a + b$ pour lesquels je connais f*(a)* et f*(b)*, il me suffira de calculer la somme f*(a)* + f*(b)*.

Procédure 2

Comme la précédente, cette procédure prend en compte les relations entre les nombres **relatifs à une même grandeur**. En revanche, elle **privilégie les relations de type multiplicatif**.

Mise en œuvre sur deux exemples

• *Exemple 1 : 3 croissants coûtent 11,85 F. Combien coûtent 15 croissants ?*

Du point de vue des outils sémiotiques, comme pour la procédure 1, on peut distinguer des catégories.

– L’utilisation d’**expressions *orales* de la forme «… fois plus …»** : ainsi, on dira : «15 croissants cela fait 5 fois 3 croissants». Donc le prix à payer est 5 fois celui de 3 croissants.

À l’écrit, on trouvera fréquemment un mélange de langue naturelle et d’opérations en ligne :

15 = 5 x 3
11,85 x 3 = 35,55 (l’opération étant posée par ailleurs)
Donc 15 croissants coûtent 35,55 F.

– La construction d’un tableau avec opérateurs tels que celui-ci :

	$\xrightarrow{\text{x 5}}$	
nombre de croissants	3	15
prix en F des croissants	11,85	35,55
	$\xrightarrow{\text{x 5}}$	

Remarque :

Les problèmes dits «de multiplication» correspondent au cas particulier où l’un des nombres est égal à 1. Nous avons remarqué précédemment que ce nombre 1 n’apparaît pas dans l’énoncé. L’un des mérites de l’outil «tableau» est de le faire apparaître clairement :

Nombre de croissants	1	15
Prix en F des croissants	3,95	?

• *Exemple 2 : 12 croissants coûtent 47,40 F. Combien coûtent 3 croissants ?*

Là encore, on retrouvera :

– L’utilisation d’**expressions *orales* de la forme «… fois moins …»** : ainsi, on dira : «3 croissants cela fait 4 fois 12 croissants». Donc le prix à payer est 4 fois moins grand que celui de 3 croissants.

À l'écrit, on trouvera fréquemment un mélange de langue naturelle et d'opérations en ligne :

3 = 12 : 4
47,70 : 4 = 11,85 (l'opération étant posée par ailleurs)
Donc 3 croissants coûtent 11,85 F.

– La construction d'un **tableau avec opérateurs** tels que celui-ci :

: 4

nombre de croissants	12	3
prix en F des croissants	47,70	11,85

: 4

La même remarque peut être faite au sujet de l'emploi de l'outil «tableau» dans les problèmes dits «de division» où ce dernier permet de rendre visible le nombre 1, comme l'illustrent les exemples suivants déjà évoqués plus haut :

Nombre de pages	1	?
Nombre de photos	12	96

Nombre de pages	1	8
Nombre de photos	?	96

À propos de l'enseignement de la procédure 2

À l'école élémentaire, elle est enseignée dans le cas où les nombres par lesquels on est amené à multiplier (ou diviser) sont des nombres entiers, et même parfois mettant en œuvre des «demis» comme dans l'exemple suivant :

4 dictionnaires pèsent 10 kg. 14 dictionnaires, cela fait 3 et demi fois plus que 4 dictionnaires. Donc 14 dictionnaires pèsent 3 et demi fois plus, c'est-à-dire 35 kg.

Mais, très souvent, l'emploi de cette procédure est couplé avec celui de la procédure 1, ce qui permet de combiner des relations additives et multiplicatives, comme dans l'exemple suivant :

4 dictionnaires pèsent 10 kg.
12 dictionnaires, cela fait trois fois plus, donc 30 kg.
2 dictionnaires, c'est la moitié, donc 5 kg.
14 dictionnaires, c'est la même chose que «12 dictionnaires + 2 dictionnaires» donc cela fait 35 kg.

On peut également utiliser l'outil tableau pour traduire une telle procédure mixte. On y fait apparaître des multiples et diviseurs (ici, 12 et 2) dont on a besoin sur la première ligne pour «décomposer additivement» le nombre (ici, 14) dont on recherche le correspondant sur la deuxième. On trouve les correspondants de ces nombres à l'aide de la procédure 2, puis on termine avec la procédure 1.

Remarque :

Les nouveaux programmes de l'école primaire, qui feront sentir pleinement leur effet sur les élèves de collège à partir de la rentrée scolaire 99/2000, modifient le savoir enseigné en ce qui concerne la multiplication et la division. Nous rappelons ci-dessous les compétences exigibles au cycle 3 les concernant :

«– utiliser à bon escient le calcul réfléchi (mental ou écrit) ; en particulier, [...] l'élève aura été entraîné à une pratique régulière du calcul mental dont il maîtrisera les méthodes usuelles (savoir multiplier ou diviser un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1000, multiplier un nombre entier par 0,1, par 0,01 et connaître les critères de divisibilité par 2 ou par 5) ;

– maîtriser la multiplication des entiers ou d'un décimal par un entier ; l'utilisation de la calculatrice ;

– maîtriser la division euclidienne (avec quotient et reste) de deux entiers, la division d'un décimal par un entier.

En revanche, ***le calcul du produit ou du quotient de deux décimaux n'est pas un objectif du cycle****»*[13].

13. On pourra utilement se référer à la note de service sur l'articulation école/collège, parue dans le BO *du 5/12/96.*

En classe de 6e

La portée de cette procédure va être agrandie au cas où le nombre par lequel on est amené à multiplier est un quotient d'entiers. L'écriture fractionnaire de ce quotient est introduite, et les commentaires y font une large place ; en voici quelques extraits :

«À l'école élémentaire, l'écriture fractionnaire a été introduite à partir de situations de partage. Les activités poursuivies en 6e s'appuient sur deux idées :

– le quotient $\frac{a}{b}$ est un nombre,

– le produit de $\frac{a}{b}$ par b est égal à a.

Ceci permet de considérer un nombre tel que $\frac{4}{3}$ comme quatre fois un tiers, le tiers de quatre ou encore le nombre dont le produit par 3 est égal à 4.

Dans les situations de proportionnalité, le quotient de deux nombres est utilisé comme un opérateur. On visera aussi à lui faire acquérir le statut de nombre au travers de multiples activités : repérage (placement sur une droite graduée), mesure, calcul (possibilité d'utiliser un quotient $\frac{a}{b}$ dans un calcul, sans effectuer nécessairement la division de a par b).

On dégagera et on utilisera le fait qu'un quotient ne change pas quand on multiplie son numérateur et son dénominateur par un même nombre. À l'occasion de simplifications, on pourra faire intervenir des critères de divisibilité, sans nécessairement les justifier.»

La notion de quotient est ensuite étendue aux nombres décimaux.

«On étendra le travail fait sur des entiers à des égalités telles que $\frac{5,24}{2,1} \approx \frac{524}{210}$, par exemple en utilisant la calculatrice ou en ayant recours à des changements d'unités. Cette extension permettra d'élargir la division à des cas où le diviseur est décimal. Aucune compétence n'est exigible à ce sujet.»

Justification mathématique de la procédure

Nous reprendrons les mêmes notations que précédemment.

Si *a* (kg de viande) coûtent f*(a)* (francs),
et si *k* est un nombre entier,
ou un nombre décimal (nombre qui est le quotient d'un entier par une puissance de 10),
ou un nombre rationnel (nombre qui est le quotient d'un entier par un entier non nul),
ka (kg de viande) coûtent *k*f*(a)* (francs).
Autrement dit : f*(ka)* = *k*f*(a)*.

Une fonction f vérifiant la propriété :
pour tous nombres a *et* k, *f*(ka) = k*f*(a)
est dite **homogène**.

L'intérêt de cette propriété dans la résolution de problèmes est le suivant :

– si j'ai à calculer le prix de *c* (kg de viande), et si je dispose de deux nombres *a* et *k* tels que $c = ka$ pour lesquels je connais f*(a)*, il me suffira de calculer le produit de *k* par f*(a)* : *k*f*(a)* ;

– elle présente, par ailleurs, un intérêt pour reconnaître une situation de proportionnalité, en se posant la question : «Si l'une des grandeurs est multipliée (ou divisée) par un nombre, l'autre grandeur est-elle multipliée (ou divisée) par le même nombre ?»

Vocabulaire

Le nombre k qui est celui par lequel il convient de multiplier la masse *a* kg pour trouver *c* kg, c'est-à-dire le nombre tel que *k*(*a* kg) = *c* kg, lorsqu'on examine la situation du point de vue des dimensions, est un nombre sans dimension, un **scalaire**.

Procédure 3

Cette procédure, souvent appelée **«le passage par l'unité»** ou **«le retour à l'unité»**, rappelle des pratiques bien connues sous le nom de **«règle de trois»**, la seule différence résidant dans les moyens sémiotiques employés.

Son caractère «naturel» vient du fait que, dans le contexte commercial où nous prenons notre exemple, le «prix au kilo» est très utilisé, la loi en imposant même l'affichage sur les lieux de vente.

Mise en œuvre sur un exemple

3 croissants coûtent 11,85 F. Combien coûtent 7 croissants ?

La mise en œuvre se fait souvent oralement, à l'aide de la «comptine» suivante :

3 croissants coûtent 11,85 F. Donc, 1 croissant coûte 3 fois moins, c'est-à-dire 11,85 : 3 F. Cela fait 3,95 F. Et donc, 7 croissants coûtent 7 fois plus, c'est-à-dire 27,65 F.

Du point de vue des écrits demandés aux élèves, ils peuvent reprendre la «comptine» précédente, ou s'appuyer sur un tableau où apparaissent deux opérateurs (: 3 puis x 7).

À propos de l'enseignement de la procédure 3

Elle est enseignée aussi bien à l'école élémentaire qu'au collège.

Remarque :

En 6e et après, l'agrandissement de la portée de la procédure 2 limite l'emploi de la procédure 3 : on peut en effet directement utiliser l'opérateur « $\times \frac{7}{3}$ » et multiplier 11,85 par ce dernier, calcul que l'on peut conduire de trois manières, le calcul préalable du quotient n'étant d'ailleurs pas ici la meilleure.

Justification mathématique de cette procédure

Cette procédure consiste à appliquer deux fois de suite la procédure 2 :

Si *a* (kg de viande) coûtent f*(a)* (francs), puisque 1 est le quotient de *a* par *a* (1 = *a / a*),
1 (kg de viande) coûte f*(a)* / *a* (francs) ;
donc *c* (kg de viande) coûtent *c* f*(a) / a* (francs).

Procédure 4

Elle est souvent évoquée sous le nom de **«méthode du coefficient de proportionnalité»**.

Par rapport aux procédures précédentes, elle présente une différence essentielle. Alors que ces dernières utilisaient seulement des relations entre les mesures d'une même grandeur (relations internes), la procédure 4 prend en compte des **relations entre les mesures des deux grandeurs** (relations externes).

Mise en œuvre sur deux exemples

4 dictionnaires identiques pèsent 10 kg. Combien pèseraient 14 dictionnaires ?

Dans une recette, il faut 100 g de farine pour 25 g de beurre. Quelle quantité de farine faudra-t-il pour 40 g de beurre ?

La procédure consiste à se demander, dans le premier exemple, par quel nombre il convient de multiplier 4 pour trouver 10, puis à multiplier 14 par ce nombre (2,5). Dans le deuxième, il est facile de trouver qu'il faut quatre fois plus de farine que de beurre.

Du point de vue de la mise en œuvre, on rencontre là encore deux types d'écrits :

– la langue naturelle accompagnée d'opérations en ligne,

– le tableau avec opérateurs, par exemple, ici :

Nombre de dictionnaires	4	14			x 2,5
Poids correspondant	10				

Ou pour le deuxième exemple :

Quantité de beurre (en g)	25	40			x 2,5
Quantité de farine (en g)	100				

À propos de l'enseignement de la procédure 4

Elle est utilisée **dès l'école primaire**, dans le cas où le coefficient A de proportionnalité est un nombre entier. Lorsque A est de la forme $1/n$, n désignant un entier, la multiplication par $1/n$, qui est hors programme, est remplacée par la division par n.

Les supports écrits avec lesquels les élèves sont mis en relation sont encore des deux types précédemment évoqués : le texte en langue naturelle accompagné d'opérations et le tableau avec opérateurs fléchés ayant la forme suivante :

Mesures de la grandeur 1					x ou : n
Mesures correspondantes de la grandeur 2					

Comme pour la procédure 2, **le passage en 6e** s'accompagne d'un élargissement de la portée de cette procédure : l'opérateur multiplicatif A peut désormais être un quotient d'entiers écrit sous forme fractionnaire $\frac{a}{b}$.

Justification mathématique de cette procédure 4

Une fonction f qui est à la fois **additive** et **homogène** est dite **linéaire**.

Il n'est pas très difficile de démontrer qu'une fonction est linéaire si et seulement si il existe un nombre A tel que : **pour tout nombre *x*, f(*x*) = A*x***.

L'intérêt de cette propriété dans la résolution de problèmes est le suivant :

Si j'ai à calculer le prix de *c* (kg de viande), et si je dispose d'un nombre *a* pour lequel je connais f*(a)*, il me sera facile de déterminer le nombre A : c'est le quotient de f*(a)* par *a*. Pour trouver f*(c)*, il me suffira ensuite de multiplier le nombre A obtenu par *c*, **et ceci quel que soit *c***. En d'autres termes, avec une calculatrice, (x A) pourra jouer le rôle d'opérateur constant.

On remarquera qu'en pratique, puisque A n'est autre que f(1), ceci ressemble beaucoup à la procédure 3 : mais on s'appuie sur le fait que l'on passe de *x* à f*(x)* en multipliant *x* toujours par le même nombre A, sans valoriser le fait que ce nombre A est l'image de 1 par *f*, et surtout sans même évoquer 1 et son image.

Vocabulaire :

Le nombre A est appelé **coefficient de proportionnalité** entre les deux grandeurs.

Remarque :

Du point de vue de l'analyse dimensionnelle, A n'est un nombre sans dimension que si les deux grandeurs proportionnelles sont de même nature. Dans les autres cas, il représente la mesure d'une grandeur - quotient (prix par unité de masse, vitesse, etc.), l'unité choisie étant le quotient des unités avec lesquelles on mesure les deux grandeurs (F/kg, km/h, etc.).

Procédure 5

Elle est très connue sous le nom de **«technique des produits en croix»**.

Elle ne s'appuie sur aucun raisonnement mettant en œuvre les grandeurs.

Mise en œuvre sur un exemple

La procédure porte un nom (produit en croix) qui est inséparable du dispositif sémiotique que constitue le tableau à quatre cases dit «de proportionnalité». Considérons, par exemple, le tableau suivant, relatif à un achat de viande :

Masse de viande (en kg)	2,5	1,75
Prix correspondant	230	?

La procédure consiste à multiplier 230 par 1,75 (on obtient ainsi l'un des produits en croix), puis à multiplier 2,5 par ? On écrit que les «produits en croix» sont égaux, et on en déduit que le prix recherché s'obtient en divisant le produit 230 x 1,75 par 2,5. Parfois même, on court-circuite l'étape consistant à écrire l'égalité des «produits en croix» (car elle nécessite de désigner l'inconnue par un symbole) et l'on obtient alors la procédure suivante : on multiplie 230 par 1,75, puis on divise par 2,5.

À propos de l'enseignement de la procédure 5

Le lecteur aura d'emblée compris que cette procédure – dans laquelle on commence par multiplier un nombre qui mesure une masse de viande, par un nombre qui mesure un prix – est plus abstraite que toutes celles qui précèdent, car elle nécessite une perte de sens : l'unité «kg x F» n'a aucune existence dans les pratiques commerciales dans nos sociétés.

Cette procédure n'est pas explicitement évoquée dans les programmes actuels. L'algorithmisation de cette procédure, notamment dans les problèmes de recherche de quatrième proportionnelle, se voit facilitée par l'emploi du «tableau à quatre cases», et par des outils à forte sémioticité tels que les expressions «on fait le produit en croix». Professeurs et élèves ont alors à leur disposition des moyens langagiers – gestuels, oraux et écrits – pour dire ce qu'il convient de faire, et comment le faire. C'est l'une des raisons de son succès, en dépit de la difficulté de la justification de son bien-fondé, et de l'abstraction plus forte qu'elle suppose (perte de sens évoquée ci-dessus).

Elle trouve légitimement sa place dans l'enseignement à un niveau plus élevé, et notamment à partir du moment où l'on dispose de lettres pour désigner les inconnues (classes de 5e, et surtout, de 4e).

Justification mathématique de cette procédure

Considérons la fonction linéaire f qui à tout nombre x associe le nombre A*x*.

Comparons $af(c)$ et $cf(a)$; $af(c) = a(Ac)$; $cf(a) = c(Aa)$. L'égalité de $af(c)$ et de $cf(a)$ résulte de la commutativité et de l'associativité de la multiplication.

14. Voir le paragraphe 1-2. du I, dans la partie consacrée à la proportionnalité, l'évocation d'un article de Yves Chevallard.

À une époque déjà lointaine[14], si on avait disposé de la notion de fonction et des écritures qui lui sont associées, ce qui n'était évidemment pas le cas, cette propriété se serait écrite par exemple : $a : f(a) : : c : f(c)$. En divisant le produit des «moyens» ($c\ f(a)$) par l'autre extrême a, on obtient $f(c) : f(c) = \dfrac{cf(a)}{a}$.

L'intérêt de cette propriété dans la résolution de problèmes est le suivant :

Si j'ai à calculer le prix de c (kg de viande), et si je dispose d'un nombre a pour lequel je connais $f(a)$, il me suffira de multiplier c par $f(a)$, puis de diviser ce produit par a.

Utilisation d'un graphique

À propos de l'enseignement de la méthode graphique

Elle est évoquée **dès l'école primaire**, dans la compétence exigible suivante : «Reconnaître une situation de proportionnalité, et la traiter par les moyens de son choix (utilisation de graphiques, de tableaux de nombres)», sans qu'aucune justification théorique ne soit donnée à ce niveau, où la méthode graphique met surtout en jeu des coordonnées entières. On la retrouve **en 6e**, dans ce même rôle, mais surtout en classe de **5e**. **En 4e, cette compétence devient exigible. En 3e**, on étudie pour elle-même la notion de fonction linéaire (en s'appuyant sur les situations de proportionnalité rencontrées dans les classes précédentes), et on justifie que sa représentation graphique est une droite.

La maîtrise de telles représentations graphiques suppose des compétences complexes : graduation des axes, repérage vertical/horizontal, interprétation de points comme couples de nombres, interprétation de la pente d'une droite, signification à attribuer ou non à tous les points d'une droite (ou seulement à certains d'entre eux, régulièrement espacés dans certains cas et pas dans d'autres), etc. Ces compétences ne sont globalement guère en place avant la fin du collège. Il convient donc d'en faire un usage modéré et prudent, à l'école primaire et au début du collège.

Mises en œuvre possibles

À l'école primaire et au début du collège

• On donne aux élèves un graphique cartésien déjà fait : leur tâche va consister à lire et interpréter les coordonnées de certains points de la demi-droite d'origine O qui y figure.

Par exemple, on donne une mesure de la première grandeur qui, compte tenu des conventions usuelles, correspond sur le graphique à l'abscisse d'un point A de cette demi-droite.

On demande aux élèves de trouver la mesure correspondante pour la deuxième grandeur. Il convient alors qu'ils lisent l'ordonnée du point A (ou une de ses valeurs approchées).

• On peut demander aux élèves de constater l'alignement de points dans le cas d'une situation de proportionnalité. Mais ce travail est coûteux, et d'un usage limité.

On ne peut pas justifier à ce niveau qu'une situation de proportionnalité se traduit toujours graphiquement de cette manière : il convient donc de dire clairement qu'on l'admet.

Remarque :

L'alignement de quelques points avec l'origine ne garantit pas que l'on se trouve dans une situation de proportionnalité (comme l'illustre la situation bien connue de l'allongement du ressort : pour de faibles allongements, la situation est linéaire, et elle cesse de l'être).

• On peut leur montrer des situations où l'emploi d'un graphique conduit à des points non alignés avec l'origine. Dans un tel cas, on peut en déduire que l'on est en présence d'une situation de non-proportionnalité, compte tenu du fait (admis) qu'une situation de proportionnalité se traduit graphiquement par des points alignés avec l'origine.

Justification mathématique de la méthode graphique

Une fonction linéaire f, dans le plan muni d'un repère cartésien, a pour représentation graphique une droite D passant par l'origine O du repère.

L'intérêt de cette propriété dans la résolution de problèmes est le suivant :

Si je dispose du tracé de la droite D, connaissant l'abscisse *c* de l'un de ses points, on peut déterminer par lecture graphique son ordonnée f*(c)* (en général, on n'en détermine qu'une valeur approchée) ; connaissant l'ordonnée d'un tel point, on peut déterminer son abscisse ou une de ses valeurs approchées.

Mais son principal intérêt réside dans la reconnaissance d'une situation de non-proportionnalité : des points non alignés avec l'origine du repère garantissent que l'on ne se trouve pas dans une situation de proportionnalité.

Des procédures de résolution qui ne sont plus enseignées

Le lecteur aura constaté que des moyens de traiter des problèmes de proportionnalité ne sont pas apparus dans ce qui précède. Le plus célèbre est constitué par les proportions, égalités de «rapports», et leur «algèbre».

La technique des proportions

Nous n'en donnerons qu'un bref aperçu.

Le problème des dictionnaires peut se traiter sous la forme d'une proportion à compléter :

$$\frac{14}{4} = \frac{?}{10}$$

On peut alors traiter ainsi la question : $\frac{14}{4} = \frac{7}{2} = \frac{28}{8} = \frac{7+28}{2+8} = \frac{35}{10}$

Ainsi ? est égal à 35.

Ce raisonnement s'appuie sur les résultats suivants :

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors, quels que soient les nombres k et k', $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a + c}{b + d} = \frac{ka + k'c}{kb + k'd}$

De tels moyens ne sont plus enseignés aujourd'hui.

La méthode dite «des écarts constants»

Nous n'avons pas cité non plus la procédure parfois appelée «des écarts constants», traduisant la propriété : «si *a, b, c* sont tels que $b - a = c - b$, leurs images par une fonction linéaire f vérifient : $f(b) - f(a) = f(c) - f(b)$.»

En effet, si cette propriété peut être utilisée pour traiter quelques problèmes de proportionnalité (les contraintes sur *a, b, c* sont fortes), elle ne peut pas l'être pour reconnaître une situation de proportionnalité : elle est en effet vraie pour toutes les fonctions affines, définies par $f(x) = Ax + B$, et donc pas uniquement par les fonctions linéaires ! Cette différence dans la portée de cette propriété risque d'être difficile à enseigner et à apprendre.

1-3. Comment articuler l'enseignement de ces procédures et des outils sémiotiques associés ?

L'évolution des différentes façons d'enseigner les questions relatives à la proportionnalité décrite montre bien l'importance des dénominations des pratiques de résolution de problèmes et des outils sémiotiques qu'elles incorporent : l'évocation de la «règle de trois», de «l'algèbre des proportions», des «tableaux de proportionnalité» suffit presque à identifier une période et un niveau de l'enseignement. À la règle de trois, et surtout à son algorithmisation, on a reproché d'être pour certains élèves une mécanique trop sensible au contexte et aux personnes. Le manque d'outil sémiotique adapté à la notion de fonction (les notations f et $f(x)$ n'étant pas véritablement utilisées et parfois même pas introduites du tout) a fait que l'on s'est rabattu sur l'outil «tableaux avec opérateurs», et qu'un véritable glissement métadidactique s'est produit : au lieu d'enseigner des techniques de résolution de problèmes de proportionnalité, on a d'abord enseigné des techniques pour remplir de tels tableaux, au détriment de la «mise en tableau» de la situation sous-jacente à un problème de proportionnalité.

Après ce changement de couples (procédures, outils sémiotiques) conduisant chacun à des difficultés d'enseignement, mais surtout d'apprentissage, la tentation pour les responsables de l'enseignement des mathématiques est grande de ne pas choisir, et de proposer aux élèves un panel le plus complet possible. On est alors conduit à établir un rapport entre les élèves et chacune des procédures et écritures explicitées précédemment, et parfois à allonger la liste : en effet, la réciproque de la fonction linéaire qui à x associe Ax, c'est-à-dire celle qui à x associe x/A, peut être employée dans la résolution de certaines questions, ce qui augmente d'autant la rubrique des méthodes possibles. Le risque est alors grand, surtout avec des élèves en difficulté, que la coupe «déborde», et qu'au lieu de leur donner une liberté plus grande, on contribue à les cantonner sur celle(s) des façons de faire qu'ils préfèrent.

Les documents d'accompagnement du programme de 6e rappellent à ce sujet au professeur que *«dans la rédaction du programme, la proportionnalité n'a pas une grande place et il n'y a pas de chapitre explicite relevant de ce thème pourtant fondamental. Il veillera cependant, au cours de l'année, à proposer de nombreuses situations en dégageant celles qui relèvent ou non du modèle proportionnel. Même si les algorithmes de recherche systématique d'une quatrième proportionnelle ne sont pas au programme, on proposera des situations multiplicatives dont le traitement permet d'utiliser et de mettre en évidence les propriétés de linéarité ou la présence d'un coefficient de proportionnalité. Le professeur ne doit pas perdre de vue que l'étude de la proportionnalité s'étend sur tout le collège».*

C'est pour fournir une aide à ce sujet aux enseignants de SEGPA que nous avons commencé par décrire les situations standard d'enseignement auxquelles les élèves ont été confrontés antérieurement : c'est l'un des buts poursuivis aux paragraphes 1-2. et 1-3. qui précèdent. Les numéros attribués aux procédures correspondent *grosso modo* à l'ordre dans lequel les élèves sont mis en rapport avec elles : les procédures reposant sur l'additivité et l'homogénéité (parfois appelées procédures «scalaires») sont d'ailleurs celles que les élèves mobilisent le plus, même lorsque la procédure «du coefficient» (parfois appelée procédure de type «fonction») semble la plus commode d'emploi, du point de vue du professeur. Cette domination des procédures de type «scalaire» sur les procédures de type «fonction» comporte évidemment des exceptions, notamment celles qui sont liées aux relations que l'élève peut établir facilement entre les nombres présents dans la situation[15].

15. Voir l'exemple cité par Yves Chevallard, évoqué à la fin du paragraphe 1-2. du I, consacré à la proportionnalité.

Or, d'une part, dans leur reprise de l'enseignement sur ce thème, les professeurs de collège ont tendance à sous-estimer l'importance des procédures de type «scalaire» (allant parfois jusqu'à passer sous silence l'additivité), ce qui prive les élèves de repères sur lesquels sont assis des moyens qui leur permettent de réussir. Il convient donc d'aménager des situations pour faire (re)vivre ces procédures «scalaires».

- La viabilité de la procédure 1 mettant en œuvre l'additivité nécessite des situations ne se réduisant pas à la recherche d'une ou plusieurs «quatrièmes proportionnelles» : par exemple, une situation où l'on donne le prix de 9 croissants et le prix de 6 croissants, et où l'on demande le prix de 15 croissants, de 21 croissants. Ce type d'exercice, pourtant présent dans certains items de l'évaluation nationale à l'entrée en 6e, est encore sous-exploité dans l'enseignement à ce niveau.
- Celle de la procédure 2 mettant en œuvre l'homogénéité est limitée lorsque l'on considère comme première grandeur une grandeur discrète (dont les mesures s'expriment à l'aide de nombres entiers) : en effet, on privilégie ainsi l'emploi de la procédure 3 de retour à l'unité. On retiendra donc qu'il faudra lui préférer une grandeur «continue», dont les mesures peuvent être n'importe quel nombre (longueurs, aires, angles, volumes, etc.).

D'autre part, du point de vue des dimensions des grandeurs en présence, nous avons vu plus haut que, si les deux grandeurs ne sont pas de même espèce, les procédures de type «fonction», notamment au moment du calcul du coefficient de proportionnalité, mettent en jeu des «grandeurs-quotients», au moins en ce qui concerne l'unité dans laquelle ce coefficient est exprimé. Or ces questions, compte tenu de leur complexité conceptuelle, ne sont vraiment abordées qu'au niveau 4e-3e. Ainsi, en 4e, l'utilisation de l'égalité «d = v t» pour des calculs de distances parcourues, des durées de parcours, mais aussi de vitesses est une compétence exigible ; les changements d'unités de vitesse (mètre par seconde et kilomètre par heure) constituent également des compétences exigibles. Pour installer les procédures «fonction», il conviendra donc de ne pas abuser de ces situations au début du collège, et de faire porter davantage l'accent sur des grandeurs proportionnelles de même espèce : c'est d'ailleurs ce que prévoient les programmes (application d'un pourcentage à des tarifs, à des effectifs de population, changements d'unités, échelles, etc., en 6e).

En revanche, on pourra utiliser des grandeurs proportionnelles d'espèces différentes pour étudier les procédures de type «scalaire». Là encore, c'est ce que prévoit le programme : en classe de 5e, une compétence exigible consiste à *«reconnaître un mouvement uniforme à la proportionnalité entre la durée de parcours et la distance parcourue, et à utiliser cette proportionnalité»*. Pour cela, on pourra évoquer le mouvement d'un véhicule «se déplaçant de manière régulière» – pour ne pas employer le mot «vitesse» –, parcourant tant de kilomètres en tant de minutes, et demander de calculer des durées de parcours et des distances parcourues, en veillant à ce que les procédures «scalaires» permettent de trouver les résultats, la procédure «fonction» étant difficile à mettre en œuvre (la mesure de la vitesse avec les unités en jeu étant par un exemple un rationnel).

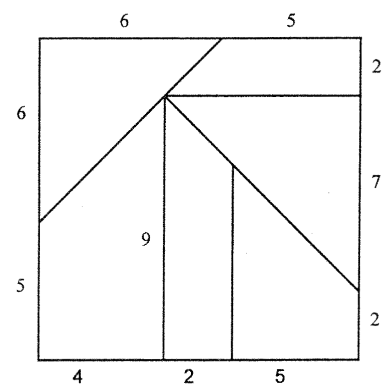
1-4. Proposition d'une situation

Conformément aux principes évoqués dans l'introduction (paragraphe I), il nous reste à évoquer une situation d'enseignement relative aux questions de proportionnalité, c'est-à-dire une situation-problème dont les élèves vont personnellement pouvoir et vouloir se saisir, qui laisse une large place à leurs conceptions, leur donnant une rétroaction possible sur leurs productions, et au cours de laquelle le professeur va pouvoir institutionnaliser des éléments de savoir figurant au programme.

Cette situation, due à Guy Brousseau, et connue sous le nom du **«puzzle de Brousseau»**, est à la fois célèbre (on la retrouve telle quelle ou modifiée dans de nombreux livres et dans des contextes d'utilisation très divers) et mal connue en ce qui concerne son utilisation en classe : une condition essentielle pour sa réussite en classe est que le professeur n'intervienne pas pendant les premières phases, ce qui n'est pas habituel car, dans les situations d'enseignement les plus courantes, il intervient très rapidement et souvent très fortement pour faire disparaître les productions non conformes à son attente. Par ailleurs, il faut reconnaître qu'elle est difficile pour des élèves de 6e, et même encore pour certains élèves de 5e.

Voici le fameux puzzle tel qu'il apparaît dans la publication originale de Guy Brousseau[16].

16. *Voir le numéro 2.1 de la revue* Recherches en didactique des mathématiques, *La pensée sauvage, pages 69 et suivantes, 1981.*



• **La consigne est simple :** les élèves étant en groupes de 4 ou 5, il s'agit d'agrandir ce puzzle de manière que le segment qui mesure 4 cm sur le puzzle originel mesure 7 cm sur le puzzle agrandi. Chaque membre du groupe agrandit une pièce différente d'un ensemble de 4 ou 5 pièces voisines.

Remarque :

Certains élèves déclarent alors d'emblée que ce n'est pas possible. On peut alors utiliser un rétroprojecteur et, en déplaçant ce dernier par rapport à l'écran, montrer que l'on peut agrandir le puzzle «comme l'on veut».

• **Que font alors les élèves ?**

Majoritairement, ils ajoutent 3 cm à chacune des dimensions, mettant ainsi en œuvre un «théorème en acte» généré par une conception très couramment présente qui va ici se constituer en obstacle : pour agrandir «en conservant les formes», il faut ajouter la même longueur à chacune des dimensions.

La force principale de la situation réside dans le fait qu'elle rend inutile toute intervention du professeur pour que les élèves comprennent que cette stratégie échoue : ils le constatent eux-mêmes, en voyant que les différentes pièces construites ne se «recollent» pas bien, empiétant l'une sur l'autre ou laissant des vides. Au-delà de cette situation, il est essentiel que le professeur donne l'habitude à ses élèves de chercher leurs solutions, plutôt que de les inviter à interpréter les indices qu'il pourrait leur donner. Il doit rester neutre sur le plan des connaissances, se contentant de soutenir les élèves sur le plan affectif.

D'autres stratégies d'élèves peuvent cependant apparaître. Il peut arriver que certains rectifient leurs pièces pour obtenir un bon raccordement, ou dessinent un grand carré et le découpent ensuite : les raccordements sont alors impeccables. Lorsque ceci se produit, le professeur peut utiliser les particularités de certaines des dimensions sur le puzzle original : par exemple, il y a deux pièces ayant pour mesure 2, une autre ayant pour mesure 4, une troisième ayant pour mesure 6. En assemblant convenablement ces pièces, le professeur peut mettre en évidence les relations entre ces mesures (2 + 2 = 4 ; 4 + 2 = 6), et inviter les élèves à faire le même assemblage avec les pièces de leur puzzle agrandi : leur subterfuge est alors mis à jour. La complexité du puzzle permet ainsi de fabriquer, lors de cette phase manipulatoire, plusieurs groupements de pièces suggérant de mettre en œuvre les propriétés d'additivité et d'homogénéité qui, rappelons-le, sont plus disponibles chez les élèves que celles liées au coefficient de proportionnalité.

Le professeur peut également employer ce procédé pour aider les élèves qui n'arrivent pas à produire d'autres stratégies que celle du «modèle additif».

Lorsque les élèves admettent qu'il doit y avoir une autre loi et se mettent à la chercher, les choses vont beaucoup plus vite, surtout si l'un d'eux dispose les mesures dans un tableau :

4 ⟶ 7
2 ⟶
6 ⟶
5 ⟶
9 ⟶
7 ⟶

Le professeur peut lui-même demander aux élèves de préparer leurs calculs, en leur proposant de construire un tel tableau, éventuellement accompagné d'opérateurs :

Ancienne longueur *(mesure en cm)*	Nouvelle longueur *(mesure en cm)*
4	7
2	3,5
6	
5	
10	

À un moment donné, le professeur leur suggère de considérer 10 comme nombre dans la première colonne. Malgré le fait que cette mesure n'apparaisse pas dans le puzzle original, cette idée n'est pas contestée, comme si, dès que le «modèle additif» est rejeté, ces nouvelles techniques s'imposaient. Cela fournit l'occasion de travailler avec les élèves les propriétés d'additivité et d'homogénéité.

Avant d'arriver au coefficient de proportionnalité, il va se passer beaucoup de choses[17].

• Par exemple, dans l'optique des nouveaux programmes de collège, on va travailler la résolution de petites équations simples telles que : 8 x … = 7.

• Puis le professeur va faire travailler d'autres tableaux, sans aucun travail réel sur des **puzzles**, comme celui figurant page suivante :

17. La suite de l'exploitation en classe de la situation doit beaucoup à Claude Landré, professeur de collège à Olivet, qui a une grande expérience à ce sujet.

Ancienne longueur *(mesure en cm)*	Nouvelle longueur *(mesure en cm)*
12	15
6	
18	
1,8	
19,8	
25,8	

Le but est de favoriser l'algorithmisation des procédures en rendant impossible le recours expérimental et concret à un véritable puzzle : ce volontaire abandon d'une «partie du sens» de la situation d'origine est nécessaire à l'activité mathématique.

• Puis le professeur ordonne les nombres de la première colonne du tableau de la situation initiale. Les élèves voient alors apparaître l'opérateur «x 1,75», permettant de passer de la première colonne à la deuxième.

• Pendant quelque temps, le professeur passe à d'autres activités, laissant un temps de maturation sur ce qui vient d'être fait.

• Lors de la reprise de ce thème, le professeur pourra reprendre le tableau passant de 12 à 15 évoqué ci-dessus, et utiliser les nombres de la première colonne comme variable didactique pour faire émerger l'intérêt de la procédure «fonction» ; par exemple, il demande aux élèves de trouver la longueur correspondant à une ancienne longueur de 27,7 cm. Le choix de 27,7 rend peu pertinentes les procédures «scalaires», et montre tout l'intérêt de la nouvelle procédure, utilisant le coefficient de proportionnalité.

• À la fin, on écrit dans le cahier les différentes procédures évoquées précédemment, en utilisant les outils sémiotiques utilisés précédemment, et notamment les tableaux avec opérateurs fléchés.

• Il conviendra ensuite d'aborder d'autres situations relevant de la **proportionnalité faisant intervenir d'autres contextes**, qui permettront de montrer que ces mêmes outils sémiotiques et les mêmes procédures peuvent être mobilisés pour traiter les problèmes.

2. Thème 2 : vers la symétrie centrale

2-1. Le dispositif expérimental choisi

En classe de 6e, une première transformation, la symétrie axiale, a été enseignée.

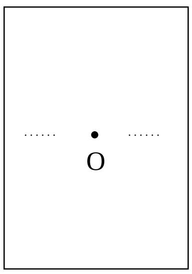
De la même façon que l'on a pu faire découvrir à l'élève la symétrique d'une figure par rapport à un axe, grâce au dispositif expérimental du pliage ou du calque, il convient, en classe de 5e, de mettre au point un nouveau dispositif expérimental qui va permettre de mettre les élèves en rapport avec la symétrie centrale.

En effet, conformément à ce qui a été rappelé au paragraphe 1-2. du I, l'approche des transformations géométriques souhaitée par les programmes repose sur un travail expérimental : *«Dans un premier temps, l'effort portera sur un travail expérimental (pliage pour la symétrie axiale, calque pour le demi-tour), permettant d'obtenir un inventaire abondant de figures simples. […]»*. Il appartient donc au professeur d'élaborer un procédé expérimental qui permette d'obtenir «d'un seul coup» le symétrique d'une figure par rapport à un point.

Plusieurs dispositifs expérimentaux sont possibles pour réaliser un demi-tour ; l'un d'eux, utilisant un transparent sur lequel on reproduit la figure, a été utilisé dans un travail de recherche par Régis Rivoire[18].

Dans les séances qui ont été expérimentées[19], le dispositif utilisé repose sur l'emploi du papier calque. Il nécessite le **matériel** suivant :

– une feuille de papier calque ;
– des feuilles de papier (ou de carton souple) sur lesquelles sont déjà dessinées des figures (les figures «mères»), ainsi qu'un point O, centre de la symétrie, et des repères transversaux (voir la figure ci-dessous), que nous appellerons dans la suite des «fiches de travail» ;



– un support de travail en bois, permettant d'enfoncer une punaise ;
– une punaise ;
– un crayon à papier, type HB.

Le **processus expérimental** est le suivant :

– l'élève pose sa fiche de travail sur le support en bois et la recouvre de la feuille calque ;
– il positionne les deux parfaitement ;
– il reporte sur le calque les repères transversaux et le point O ;
– il reproduit sur le calque la figure de la fiche de travail ;
– il retourne le calque et repasse l'envers de la figure avec le crayon gras ;
– il repositionne le calque et fixe la punaise ;
– il fait pivoter le calque de 180° en superposant correctement les repères ;
– il repasse la figure sur le calque ;
– il enlève le calque : il reste sur la fiche l'empreinte du symétrique de la figure que nous appellerons la «figure fille».

2-2. De l'emploi du dispositif expérimental à l'identification et la formulation des propriétés de la transformation

La citation des programmes de 5e évoquée au paragraphe précédent se poursuit ainsi : *«Les propriétés conservées par symétrie centrale seront ainsi progressivement dégagées, en comparant avec la symétrie axiale.»* Nous allons examiner maintenant les problèmes d'enseignement qui surviennent à cette étape. Deux questions se posent à l'enseignant :

– Quelles sont les propriétés dont l'institutionnalisation est visée ?
– Quels types de tâches (à destination des élèves) choisir pour les amener à identifier les propriétés en question ?

La logique des contenus voudrait que l'on réponde d'abord à la première question, ce que les programmes font partiellement et d'une manière suffisante pour que nous puissions concentrer notre attention sur la deuxième.

2-2.1 Quels types de tâches pour les élèves ?

On aura compris que, dans un premier temps, les élèves sont mis en rapport avec le dispositif expérimental choisi. Pour qu'ils se familiarisent aussi bien avec le matériel qu'avec le procédé, on leur donne quelques «figures simples» sur lesquelles ils sont invités à faire agir le dispositif expérimental de demi-tour. Ces figures peuvent ne pas être des figures habituelles de la géométrie et être empruntées à des domaines tels que le dessin (logos divers), la bande dessinée, etc. L'essentiel est que les élèves puissent aisément voir l'effet global du demi-tour expérimental sur une telle figure. Ce premier temps ne pose guère de problème.

Une fois que la maîtrise du dispositif expérimental par les élèves est assurée, on va leur proposer des figures plus «géométriques», dans le but d'identifier des propriétés de la

18. Voir l'article intitulé «Symétrie centrale : évolution des procédures d'élèves dans un contexte demi-tour» dans le numéro 21 de la revue Petit x*, pp. 5 à 28, 1989.*

19. Travail conduit par David Dehame, instituteur spécialisé à l'EREA de Calais.

transformation simulée par ce dispositif expérimental, transformation qui est elle aussi «géométrique», et dont les propriétés vont mettre en jeu des objets de la géométrie (points, droites, demi-droites, segments, angles, cercles). Deux possibilités s'offrent alors au professeur.

Choix n°1 : *proposer aux élèves de constater les propriétés*

L'idée est la suivante : le professeur sélectionne une figure géométrique suffisamment dépouillée pour que l'élève, une fois qu'il a fait agir sur cette dernière le dispositif expérimental de demi-tour, puisse **constater** qu'une propriété bien précise a été conservée dans le passage de la figure «mère» à la figure «fille». Il y a donc une dialectique forte entre la figure mère choisie et la propriété à constater, et l'hypothèse sous-jacente à cette mise en œuvre didactique est la suivante : si le professeur choisit bien sa figure, les élèves doivent voir la propriété et leur seule difficulté concernera la formulation, la mise en mots, de cette dernière.

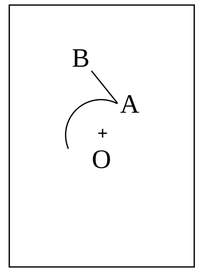
Choix n° 2 : *problématiser les propriétés*

Contrairement au choix n° 1, il s'agit cette fois-ci de mettre les élèves dans une situation où ils n'auront plus à leur disposition le dispositif expérimental : le professeur va leur demander, sans y avoir recours, de dessiner la figure que l'on aurait obtenue si on l'avait utilisé. Pour cela, l'élève va devoir décider de faire certains gestes, d'utiliser certains instruments (de tracé, de mesure), décisions qui sont prises en s'appuyant sur des propriétés que l'on cherche à lui faire utiliser et formuler. L'hypothèse, on l'aura reconnue, est une de celles évoquées dans la description du modèle «constructiviste» : c'est en agissant que l'élève construit ses connaissances. Le dispositif expérimental n'est pas pour autant rejeté : il va servir à l'élève pour valider (ou invalider) ses productions ; il va constituer un moyen de rétroaction sur les procédures utilisées, qui va lui permettre de constater que certaines sont fausses et reposent donc sur des connaissances qui se sont constituées en obstacle (par exemple, l'élève généralise à la symétrie centrale des propriétés de la symétrie axiale, etc.)[20].

*20. Plusieurs recherches ont été conduites en se plaçant dans ce cadre du choix n° 2 : les travaux de Régis Rivoire, évoqués plus haut, ainsi que ceux conduits à l'INRP (*Apprentissages mathématiques en classe de 6e*, Hatier, 1991, pour la symétrie axiale et* Apprentissages mathématiques en 5e*, INRP, 1993, pour la symétrie centrale).*

Enfin, c'est après avoir engagé des connaissances (dont certaines se sont révélées fausses) que l'on peut demander aux élèves, avec quelques chances de succès, de décrire le procédé qu'ils ont utilisé. Cette description risque d'être très contextualisée : il est probable qu'elle ne prendra en compte que la figure précise que l'élève avait à tracer. En d'autres termes, elle va sans doute davantage concerner le «dessin» que la «figure», le trait que le segment ou la droite, et peut-être faire allusion, au bord de la feuille, à la situation de la figure dans la feuille, considérations dont le géomètre qu'est le professeur sait bien qu'elles sont «hors sujet». C'est la raison pour laquelle nous avons insisté, dans l'introduction (paragraphe I), sur les différentes étapes (action, formulation, validation) dans lesquelles le professeur peut demander à ses élèves d'engager des connaissances. Les deux dernières, qui sont trop souvent sous la responsabilité exclusive du professeur, nous paraissent essentielles, en particulier pour des élèves en difficulté.

On mesure alors mieux la difficulté de la tâche proposée à l'élève dans la perspective du choix n° 1, et on comprend que le professeur doive dans ce cas intervenir beaucoup lui-même pour obtenir des formulations qui lui conviennent. Ce choix n'est efficace qu'avec des élèves qui sont capables d'anticiper, de se poser seuls des questions. Voici, par exemple, une situation proposée dans une classe de 1re année de cycle central, bâtie dans le cadre de ce choix n° 1 :



On s'arrange pour que l'arc de cercle ait pour centre O. Ainsi, à l'aide du dispositif expérimental, les élèves vont observer deux arcs «opposés» du même cercle et, compte tenu de l'importance de ceux-ci, l'idée de les faire se rejoindre poindra assez rapidement. Le seul point étant O, ils s'en serviront comme centre du cercle.

Maintenant, nommons le segment de droite [AB], et [A'B'] son image. Les élèves vont dégager que le point A et son image sont *sur un même cercle et qu'ils forment un diamètre de ce cercle. Il restera à utiliser le même procédé pour l'autre extrémité B.*

Si maintenant, on propose aux élèves de trouver l'image d'un segment de droite, sans passer par le dispositif expérimental, on peut espérer que les élèves vont tracer les cercles, les diamètres et ainsi déterminer les images respectives des deux points.

S'ils réussissent, ils auront donc, après la phase expérimentale, **dégagé une procédure de construction du symétrique d'un point par une symétrie centrale**. Par la suite, on peut penser que les élèves vont plus ou moins rapidement prendre le raccourci qui consiste à ne plus tracer les cercles, à tracer les droites passant par le centre de symétrie et à reporter les longueurs. Ils auront alors affiné la 1re procédure de construction du symétrique d'un point par une symétrie centrale, pour s'en construire une seconde (qui est la procédure standard).

On remarquera la présence – à un moment plus tardif que dans le choix n° 2 – d'une étape où les élèves doivent construire une image sans avoir recours au dispositif expérimental.

Terminons ce paragraphe en donnant quelques précisions sur les tâches que l'on peut proposer aux élèves dans le cadre du choix n° 2[21].

Après la phase de familiarisation des élèves avec le dispositif expérimental, on peut leur proposer les tâches suivantes :

- Sans utiliser le dispositif expérimental, **dessiner à main levée** la figure que l'on aurait obtenue avec son aide pour un choix de figures «mères», qui sont du même type que dans la phase précédente. Le dispositif expérimental est utilisé après que le dessin à main levée a été fait, pour valider ou invalider les productions. S'il n'a pas réussi, l'élève peut recommencer. Dans le même ordre d'idée, on peut lui demander de détecter des erreurs dans des tracés déjà effectués et de les corriger. Le but est de lui faire percevoir des propriétés «qualitatives» de la transformation (questions d'orientation, de position par rapport au centre, etc.) qui sont très utiles pour la description globale de la figure «fille», même si ces propriétés ne sont pas toutes formalisables au niveau du collège.
- Toujours sans le dispositif expérimental, **dessiner de la manière la plus exacte possible** la figure que l'on aurait obtenue avec son aide. Cette fois-ci, les élèves sont invités à utiliser certains instruments de tracé et de dessin, dont la liste leur est clairement précisée. Quant à la **figure «mère»** choisie, elle est **suffisamment complexe** pour que les propriétés visées soient utiles pour obtenir le tracé de la figure «fille». On peut demander aux élèves de numéroter les étapes de leur construction, de laisser apparents leurs traits de construction, et éventuellement de décrire par écrit certaines de ces étapes.
- La dernière phase concerne la formulation des propriétés utilisées. Nous l'aborderons à la fin du paragraphe suivant.

21. *Pour plus de détails, nous renvoyons aux articles et ouvrages évoqués à la note précédente.*

2-2.2 L'identification précise des propriétés

À ce sujet, le programme précise, dans sa colonne réservée aux commentaires :

«Ces travaux conduiront à :
– la construction de l'image d'un point, d'une figure simple ;
– la mise en évidence de la conservation des distances, de l'alignement, des angles et des aires, et l'étude d'exemples d'utilisation de ces propriétés ;
– l'énoncé et l'utilisation de propriétés caractéristiques du parallélogramme (on veillera à toujours formuler ces propriétés à l'aide de deux énoncés séparés) ;
– la caractérisation angulaire du parallélisme.»

En ce qui concerne les compétences exigibles, elles sont les suivantes :

«Construire le symétrique d'un point, d'un segment, d'une droite, d'une demi-droite, d'un cercle.
Connaître une définition du parallélogramme et des propriétés relatives aux côtés, aux

diagonales et aux angles. Relier les propriétés du parallélogramme à celles de la symétrie centrale.
Connaître et utiliser les propriétés relatives aux angles formés par deux parallèles et une sécante (en commentaires, on précise à ce sujet que l'on pourra utiliser également le vocabulaire suivant : angles opposés par le sommet, alternes - internes, correspondants).»

Comme d'habitude, le texte du programme ne fixe pas dans le détail la liste des propriétés à institutionnaliser. Il appartient donc à ceux qui élaboreront des réalisations de ces programmes (auteurs de manuels, professeurs) de l'arrêter et, pour chacune des propriétés, de préciser l'énoncé qui en rend compte (parmi de nombreuses formulations possibles). En voici un exemple[22], pour lequel nous ne citons que les propriétés figurant dans le premier chapitre consacré à ce thème (qui en comporte trois) :

22. Énoncés pris dans le manuel de 5e des éditions Hatier (1997), collection «Triangle».

«Une symétrie centrale est un «demi-tour» autour d'un point appelé centre de symétrie.
Le centre de symétrie est le milieu de tout segment reliant un point et son symétrique.
Le symétrique du point A par rapport au point O est le point A' tel que O soit le milieu de [AA'].
Le symétrique du polygone ABCD par rapport au point O est le polygone A'B'C'D'
(une figure illustre ce dernier énoncé, puis on passe aux propriétés).
a) Si deux droites sont symétriques par rapport à un point, alors elles sont parallèles.
b) Si deux segments sont symétriques par rapport à un point, alors ils ont même longueur.
c) Si deux angles sont symétriques par rapport à un point, alors ils ont même mesure.
d) Si deux figures sont symétriques par rapport à un point, alors elles ont la même aire
(chacune des propriétés est illustrée par une figure).»

Précisons que, dans la suite de ce paragraphe, nous n'examinerons que les problèmes d'enseignement posés par le dégagement des premières propriétés évoquées dans le manuel que nous venons de citer (définition et propriétés «de base» de la transformation). Nous aborderons plus brièvement les propriétés en relation avec le parallélogramme et les questions angulaires dans le paragraphe 2-3.

Si on adopte le choix n° 2 évoqué au paragraphe précédent, les élèves ont utilisé «en actes» les propriétés en question. Pourvu que le professeur ait introduit le vocabulaire minimum (symétrie centrale, centre de cette symétrie, figure symétrique d'une autre par rapport à un point), ils sont prêts à énoncer sous forme de règles d'action les propriétés en question : «Pour tracer le symétrique d'un point, on trace le segment joignant ce point au centre de la symétrie, on le prolonge du côté de ce centre d'une longueur égale : son extrémité est le symétrique du point» ; «Pour tracer le symétrique d'un segment, on trace les symétriques de ses extrémités et on les joint» ; «Pour tracer le symétrique d'une droite, on fait pareil, en prolongeant des deux côtés», etc.

On est encore fort loin des formulations que l'on trouve classiquement dans les livres, et ce n'est guère étonnant. Les figures géométriques sur lesquelles on fait agir le dispositif expérimental ne comportent aucun objet «illimité» tel que les droites et demi-droites : ces dernières sont dessinées sous forme de «traits droits sur la feuille». Seuls les élèves qui savent faire la différence entre dessin et figure (cette dernière représentant des objets de la théorie géométrique, objets qui sont définis par des propriétés et des relations avec d'autres objets, et non pas par leur «aspect») vont faire d'emblée la différence entre un trait et l'objet géométrique qu'il représente (et qui peut être aussi bien un segment, qu'une droite ou une demi-droite). C'est pourtant l'un des enjeux de la formulation des propriétés. Les «bons» objets de la géométrie sont les droites et non pas les segments : comment peut-on définir des «segments parallèles» sans faire allusion aux droites qui en sont les supports ? Si aucune formulation n'évoque les droites ou demi-droites, le professeur devra y pourvoir.

Pour que ces propriétés puissent être utilisées, il convient, comme pour les questions de proportionnalité, de doter les élèves d'instruments sémiotiques adaptés. La désignation des objets et notamment des points par des lettres apporte, à ce sujet, un confort appréciable. La prise en compte de la symétrie peut se faire à l'aide d'un petit dispositif qui joue un rôle analogue à celui du tableau avec opérateurs pour la proportionnalité. Il est (peu) connu sous le nom de «table de la symétrie». Ainsi, si E, F et G sont les symétriques respectifs de A, B et C, par la symétrie de centre O, on peut dresser la table suivante :

a pour symétrique

A	B	C	segment [AC]	droite (BC)	angle BAC	cercle (A, AB)	demi-droite d'origine A, passant par B	
E	F	G	segment [EG]	droite (FG)	angle FEG	cercle (E,EF)	demi-droite d'origine E, passant par F	

Les propriétés de la symétrie centrale permettent de compléter toutes les colonnes à l'aide des trois premières.

2-3. Le réinvestissement

Il serait regrettable que le fait d'avoir insisté, dans ce qui précède, sur l'introduction de l'objet «symétrie centrale» soit interprété comme une incitation à n'aborder, avec des élèves de SEGPA, que cette étape de l'étude de cette transformation. En effet, c'est en mettant au travail ces propriétés si chèrement dégagées qu'ils pourront comprendre la portée et l'efficacité de ces dernières. Deux exemples importants sont prévus par les programmes :

– le lien entre la symétrie centrale et les propriétés du parallélogramme ;
– les questions angulaires et la symétrie centrale.

Nous allons illustrer brièvement chacun d'eux, en utilisant un langage et des formulations à l'intention du professeur.

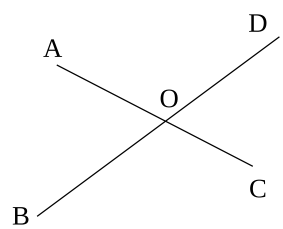
Lien entre la symétrie centrale et le parallélogramme

On dispose de la définition suivante d'un **parallélogramme : quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux**.

Considérons un quadrilatère ABCD, dont les diagonales (AC) et (BD) ont le même milieu O. La table de la symétrie par rapport à O est facile à établir pour ses quatre premières colonnes, d'où l'on déduit immédiatement les deux suivantes :

a pour symétrique

A	B	C	D	droite (AB)	droite (AD)
C	D	A	B	droite (CD)	droite (CB)



Or, une droite, par symétrie centrale, est transformée en une droite parallèle. Il en résulte que les droites (AB) et (CD) sont parallèles, ainsi que les droites (AC) et (BD), et donc, le quadrilatère est un parallélogramme. Nous venons d'établir le théorème :

Si un quadrilatère a des diagonales qui se coupent en leur milieu, ce quadrilatère est un parallélogramme.

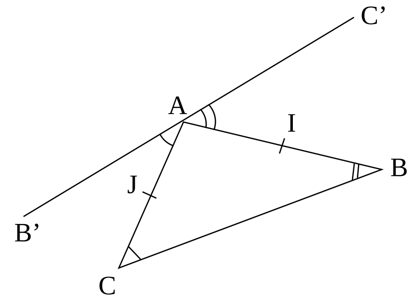
On peut continuer la table de la symétrie ainsi :

a pour symétrique

A	B	C	D	segment [AB]	segment [AD]	angle BAD	angle ABC	triangle ABC
C	D	A	B	segment [CD]	segment [CB]	angle DCB	angle CDA	triangle CDA

Des propriétés de la symétrie centrale, on peut en déduire que, dans un tel quadrilatère, les côtés opposés (qui sont symétriques) sont de même longueur et que les angles opposés (qui sont symétriques) ont même mesure. Enfin, les triangles ABC et ACD étant symétriques, ils ont même aire : ceci permet de légitimer la formule donnant l'aire d'un triangle à partir de celle donnant l'aire d'un parallélogramme, en expliquant la présence du coefficient $\frac{1}{2}$ (ou de la division par 2).

Lien entre la symétrie centrale et les questions angulaires



Par la symétrie de centre I, milieu de (AB), C a pour image C', point de la parallèle à (BC) passant par A. Par cette symétrie, l'angle ABC a pour image l'angle BAC' : ils ont donc la même mesure.

Par la symétrie de centre J, milieu de (AC), B a pour image B', point de la parallèle à (BC) passant par A. Par cette symétrie, l'angle ACB a pour image l'angle CAB' : ils ont donc la même mesure.

La somme des mesures des trois angles du triangle ABC est donc égale à la somme des mesures des angles CAB', CAB et BAC, qui est égale à 180°.

Ainsi, la somme des mesures des angles de n'importe quel triangle est égale à 180°.

Il serait dommage de priver les élèves de la preuve d'une connaissance de base de la géométrie élémentaire, connaissance qui, d'une part, est une source intéressante d'exercices, et qui, d'autre part, doit faire partie du bagage culturel de tout citoyen.

Bibliographie relative au thème «proportionnalité»

Texte de la COPREM (Commission permanente de réflexion sur l'enseignement des mathématiques) : *La Proportionnalité - Le calcul numérique,* CRDP de Strasbourg, 1987.

- Équipe Ermel, Colomb J., dir., Pressiat A., *Apprentissages mathématiques en 6*e, Paris, Hatier, 1991.

- Boisnard D., Houdebine J., Julo J., Kerboeuf M.-P., Merry M., *La Proportionnalité et ses problèmes*, Paris, Hachette, 1994.

- Équipe Ermel, *Ermel CM1*, Paris, Hatier, 1997.