Corrigé du concours blanc n°2

EXERCICE 1 (4 points)

1. Il ne peut y avoir 20 caisses pleines car 842 n'est pas un multiple de 20. Il ne peut y avoir strictement moins de 19 caisses pleines, car les caisses sont remplies l'une après l'autre. Il y a donc 19 caisses pleines. Soit x, le nombre de livres contenus dans une caisse pleine et y le nombre de livres contenus dans la caisse non pleine. On a :

$$\text{I} \quad \begin{cases} 19x + y = 842 \\ y < x \end{cases}$$

On trouve deux couples-solutions :
$x = 44$, $y = 6$ et $x = 43$, $y = 25$. On vérifiera que $x > 44$ ou $x < 43$ est impossible.

2. Les deux problèmes peuvent être :
   a. Un libraire veut expédier 842 exemplaires du même livre. Il les répartit dans des caisses de 19 livres. Il remplit complètement une caisse avant de passer à la suivante. Combien de caisses pleines va-t-il expédier ?
   b. Un libraire cherche à répartir **équitablement** dans 19 caisses, pouvant chacune contenir jusqu'à 50 livres, **le plus possible** d'exemplaires du même livre tirés d'un lot de 842 livres. Combien de livres y aura-t-il dans chaque caisse ?
3. Le système I n'est pas l'écriture de la division euclidienne de 842 par 19 qui est :

$$\text{II} \quad \begin{cases} 19x + y = 842 \\ y < 19 \end{cases}$$

En revanche, les deux problèmes de la question 2 relèvent du système II. Mais le premier est un problème de groupement (division-quotition) et le deuxième un problème de partage (division-partition).

Question complémentaire (4 points)

1. **3ème année du cycle 3 (CM2)**
   a. **Décrire une procédure que pourraient mettre en oeuvre ces élèves.** Les élèves de fin de cycle 3 peuvent faire le calcul suivant : (9 x 5) x 3= 45 x 3 = 135 donc il y a 135 caramels dans la boîte. 6 + 9 + 7 = 22 donc il y a 22 élèves et il faut faire 22 parts égales. La division de 135 par 22 donne un quotient de 6 et un reste de 3. Chaque élève aura 6 caramels et il restera 3 caramels.

   b. **Quelles compétences nécessite cette mise en oeuvre ?** Les élèves seront capables de :
   - Mobiliser un produit de trois nombres pour dénombrer une collection organisée en couches rectangulaires
   - Effectuer un produit de trois nombres
   - Mobiliser la division pour calculer la part de chacun
   - Déterminer et calculer le diviseur ; déterminer le dividende
   - Effectuer la division de 135 par 22

   c. **A quelle catégorie de problèmes rattachez-vous cette situation ?**
   Problème d'application à plusieurs connaissances.

2. **1ère année du cycle 3 (CE2)**
   a. **Décrire une procédure que pourraient mettre en oeuvre ces élèves.**

- Dénombrement des caramels : 9 x 5 = 45, donc il y a 45 caramels dans une couche ; 45 x 3 = 135, donc il y a 135 caramels dans la boîte.
- Dénombrement des élèves : 6 + 9 + 7 = 22, donc il y a 22 élèves et il faut faire 22 parts égales.
- Essais multiplicatifs successifs sur la valeur d'une part : 10 c'est trop grand (220), 5, c'est trop petit (110), 6 c'est presque bon (132), mais 7 c'est trop grand (154). On en donne 6 à chacun et il y a un reste de 3 (pour le maître ?).

b. **Quelles compétences nécessite cette mise en oeuvre ?**

Les élèves seront capables de :

- Mobiliser la multiplication pour dénombrer une collection organisée en rectangle.
- Mobiliser la multiplication dans une situation de type un / plusieurs (1 couche 45 caramels, 3 couches 45 x 3 caramels).
- Déterminer par addition le nombre de parts.
- Identifier le dividende (ce qu'on partage) et le diviseur (le nombre de parts)
- Conduire une démarche par essais multiplicatifs dans la recherche de la valeur d'une part.
- Effectuer les multiplications requises

c. **Prévoir des aides possibles que le maître pourrait apporter.**

- Pour le calcul du nombre total de caramels : amorce de remplissage de boîtes avec des caramels, ou ce qui en tient lieu, en nombre insuffisant pour remplir la boîte mais suffisant pour bien commencer le remplissage (un peu plus d'une couche).
- Pour la conduite de la démarche par essais multiplicatifs, simulation de distribution 1 par 1, 2 par 2…, puis demande d'anticipations du genre : « peut-on distribuer 3 par 3 ? plus que 3 ?»

3. 2ème année du cycle 2 (CE1)

Décrire une procédure que pourraient mettre en oeuvre ces élèves.

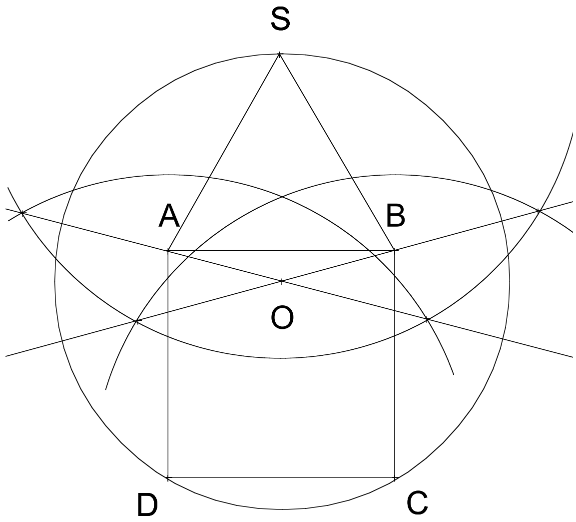
Dénombrement des caramels. Les élèves de cycle 2 peuvent produire une configuration de cubes comportant autant de cubes que la boîte de caramels. Ils peuvent alors faire un tas avec tous les cubes, puis les regrouper en paquet de 10. Ils comptent alors 13 paquets de 10 et 5 cubes isolés d'où le nombre à partager.

- **Partage**. Ils peuvent procéder à des distributions simulées 1 par 1, 2 par 2… Mais on peut aussi les questionner pour les amener à anticiper : « peut-on donner 10 caramels à chacun ? » (Ils ont trouvé dans la phase précédente qu'il n'y avait que 13 paquets de dix et non 22). Ils peuvent alors corriger en testant des paquets de 5, ce qui leur donnera 27 paquets (13 +13 + 1). En distribuant 22 de ces paquets (1 par élève) et en mettant ensemble les 5 paquets qui restent, ils auront 25 caramels en plus. Ils pourront alors prévoir de donner un caramel de plus à chaque élève et qu'il en restera 3.

EXERCICE 2 : (4 points)

ABCD est un carré dont la mesure de la longueur du côté est *a* et SAB est un triangle équilatéral. Les sommets S, D et C sont situés sur un cercle C .

1. Construction



b. Explications

Le point O est le centre du cercle C , circonscrit au triangle DCS. O est donc le point d'intersection des médiatrices de [SD], [SC] et [DC]. Il suffit donc de tracer deux de ces médiatrices.

2. Démonstrations

a. Montrons que la droite (SD) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ASO}$.

• O appartient à la médiatrice du segment [DC], donc (SO) et (DC) sont perpendiculaires.
ABCD étant un carré, les droites (AD) et (CD) sont aussi perpendiculaires.
(SO) et (AD) sont donc parallèles.
On en déduit que les angles alternes-internes $\widehat{OSD}$ et $\widehat{ADS}$ sont égaux.
• Par ailleurs, par hypothèse, AS = AD = a, le triangle ADS est donc isocèle.
On en déduit que : $\widehat{ADS} = \widehat{ASD}$.
Par conséquent : $\widehat{OSD} = \widehat{ASD}$; (SD) est donc bien la bissectrice de l'angle $\widehat{ASO}$.

b. Démontrons que le quadrilatère SODA est un losange.

• OS = OD et AS = AD = a donc (AO) est la médiatrice du segment [SD].
On en déduit que les droites (SD) et (AO) sont perpendiculaires.

• Soit I le point d'intersection des droites (AO) et (SD).
Les triangles AIS et OIS ont donc deux angles de même mesure $\widehat{OSD} = \widehat{ASD}$ d'après la question précédente et $\widehat{SIA} = \widehat{SIO} = 90$ °) et un côté commun ; ils sont donc isométriques.

On en déduit que SO = SA.
• Comme par ailleurs, SA = AD = a et que SO = OD, les quatre côtés du quadrilatère SODA ont même longueur. SODA est donc un losange de côté a.
Le cercle C a donc pour rayon a.

__**Question complémentaire : (4 points)**__

1. **Programme de construction :**

- Créer un point,
- nommer le point O,
- construire un cercle C1 de centre O et de rayon de longueur 3 cm,
- construire un point sur C1,
- nommer le point D,
- construire un cercle C2 de centre D et de rayon de longueur 3 cm,
- construire l'intersection de C1 et de C2,
- nommer le point C,
- tracer le segment [CD],
- construire le milieu du segment [CD],
- construire la perpendiculaire au segment [CD] passant par le milieu du segment [CD],
- construire l'intersection de cette perpendiculaire et du cercle C1,
- nommer le point S,
- tracer la perpendiculaire au segment [CD] passant par D,
- tracer la perpendiculaire au segment [CD] passant par C,
- tracer le cercle C3 de centre S et de rayon de longueur 3 cm,
- construire l'intersection du cercle C3 et de la perpendiculaire au segment [CD] passant par D,
- nommer le point A,
- construire l'intersection du cercle C3 et de la perpendiculaire au segment [CD] passant par C,
- nommer le point B,
- construire le polygone de trois sommets défini par les points S, A et B,
- construire le polygone de quatre sommets défini par les points A, B, C et D.

Remarques :

- ce qui précède est **un** programme possible,
- la commande « construire l'intersection de …et de … » s'entend par « construire l'ensemble intersection de … et de … » ; dans le cas de l'intersection d'une droite et d'un cercle ou dans le cas de l'intersection de deux cercles, il y a ici, deux points d'intersection, et l'on choisit celui que l'on va nommer pour obtenir la figure demandée.

2. **Dans une classe de cycle 3** Un enseignant distribue à ses élèves la figure ci-dessous et leur demande de la reproduire. Les élèves ont le libre choix des instruments qu'ils utilisent.

   a. **Compétences nécessaires aux élèves pour réaliser la tâche demandée.**

- identifier, de manière perceptive, une figure simple dans une configuration complexe,
- vérifier l'existence d'une figure simple dans une configuration complexe, en ayant recours aux propriétés et aux instruments,
- tracer une figure à partir de la donnée d'un modèle,
- savoir utiliser les instruments (règle, équerre, compas) pour tracer ou vérifier (l'alignement, la perpendicularité, l'égalité de longueurs)

   b. **Type de problème.**

Il s'agit ici d'un problème pour chercher : les élèves ne disposent pas de solution éprouvée et plusieurs démarches de résolution sont possibles. Ils doivent émettre des hypothèses, les tester

c. **Adaptations de l'activité l'enseignant peut prévoir afin de proposer une différenciation aux élèves en difficulté :**

- L'enseignant peut rajouter des lignes géométriques sur la figure, comme par exemple des (arcs de) cercles de centre S et passant par A et B (et O), de centre D et passant par A et C (et O), de centre BC et passant par B, O et D ou médiatrice du segment [CD];
- il peut également coder la figure (angles droits) ;
- il peut proposer aux élèves le début du programme de construction, en les invitant (ou non) dans un premier temps à en finir la rédaction ;
- il peut demander aux élèves de lister les éléments constitutifs de la figure et leurs propriétés connues

EXERCICE 3 : (4 points)

1. **Reproduire et compléter le tableau ci-dessous.**

Position du point M	I (départ)	A	B	K	C	D	I (arrivée)
x	0	4	7	11	15	18	22
V(x)	0	4	5	3	5	4	0

En effet, en A la distance à vol d'oiseau est égale à la distance le long du parcours, c'est-à-dire : V(x) = x ;

Quand M est en B, x = IA + AB, V(x) = IB ;
Le triangle IAB est rectangle en A, donc en lui appliquant le théorème de Pythagore :
$IB^2 = IA^2 + AB^2 = 16 + 9 = 25$, donc IB = 5;

Quand M est en K, milieu de [BC], x = IA + AB + BK, donc x = 11 et V(x)= IK = 3 par déf. ;
Quand M est en C, x = IA+ AB + BC, donc x = 15 et V(x) = IC =IB = 5 ;
Quand M est en D, x = 18, V(x)= ID = 4.

2. **Donnez deux caractéristiques, de types différents, de la courbe représentative de la fonction V.**

Voici quelques exemples de caractéristiques de types différents :

- fonction continue, donc courbe représentative continue.
- variation de la fonction V : la fonction V croit pour M entre I et B ; décroît pour M entre B et K, croît pour M entre K et C et décroît pour M entre C et I.
- extremums : 2 maximums locaux pour M=B (x=7) et M = C (x=15) ; un minimum local pour M=K(x=11).
- image de 2 points. Au départ et à l'arrivée de la course, la fonction V a une valeur nulle : V(0) = V(22) = 0.
- la courbe représentative de la fonction V est symétrique par rapport à la droite x=11. En effet, pour deux positions M et M' du coureur, symétriques par rapport à la droite (IK), les distances à vol d'oiseau V(x) sont les mêmes.
- entre les points I et A, V(x)=x. La courbe représentative de la fonction V est donc un segment de droite (première bissectrice) entre x=0 et x=4. Pour des raisons de symétrie (ou autre explication !), la courbe est aussi un segment de droite entre x=18 et x=22 (D et I).

NB : Les maximums et le minimum sont des caractéristiques de même type et ne comptent donc que pour une seule bonne réponse. La donnée des seuls maximums ou du seul minimum compte pour une réponse juste à part entière.
De même pour les deux segments de droites de la courbe: un seul segment suffit à avoir tous les points et donner les deux segments compte pour une seule bonne réponse.

3. Les courbes suivantes pourraient-elles correspondre à une représentation graphique de la fonction V dans un repère d'origine 0 ? Justifiez vos réponses.

Remarque :
Les arguments basés sur des caractéristiques justifiées à la question précédente n'ont pas besoin d'être à nouveau justifiés. En revanche les autres arguments devront l'être.

- Première méthode (éliminer les courbes qui ne conviennent pas) :
La représentation graphique de la fonction V dans un repère orthogonal a un axe de symétrie, on peut donc éliminer les courbes 2 et 4. La fonction V n'est pas constante sur un intervalle, on peut donc éliminer la courbe 1, seule la courbe 3 peut correspondre à la représentation graphique de la fonction V.

- Deuxième méthode (étudier chacune des courbes) :
La courbe 1 ne convient pas bien qu'elle ait un axe de symétrie et passe par deux points d'ordonnée nulle, car ses variations ne correspondent pas à celles trouvées pour V à la question 2, en particulier il n'existe pas d'intervalle sur lequel la fonction V serait constante.
La courbe 2 ne convient pas pour de multiples raisons : ce n'est pas la courbe représentative d'une fonction car pour 2 valeurs de x, il y a une infinité d'images (présence des contremarches de la courbe en escalier), elle n'a pas d'axe de symétrie, $V(0)\neq 0$, etc.
La courbe 3 peut convenir car elle a un axe de symétrie (vertical), elle passe par deux points d'ordonnée nulle, ses variations correspondent aux variations de la fonction V.
La courbe 4 ne convient pas pour de multiples raisons : elle ne possède pas d'axe de symétrie, elle est discontinue, elle traduit une fonction croissante par intervalles ce qui n'est pas le cas de la fonction V.

4. Expliquez pourquoi deux parties de la courbe représentative de la fonction V sont des segments de droites.

Remarque :Si cela a été bien justifié à la question 2 (ou 3), le candidat qui renverra à l'une de ces précédentes question aura tous les points.

Deux parties de la courbe sont des segments de droite symétriques.
En effet quand $0 \leq x \leq 4$, $V(x) = x$, V est une fonction linéaire sur l'intervalle [0,4], sa représentation graphique sur cet intervalle est un segment de droite passant par l'origine.
Et quand $18 \leq x \leq 22$, $V(x) = 22 - x$, V est une fonction affine sur l'intervalle [18,22], sa représentation graphique sur cet intervalle est un segment de droite.

(*Autre justification possible* : La droite (IK) est axe de symétrie et la courbe représentant la fonction V admet la droite d'équation x = 11 comme axe de symétrie donc, sur l'intervalle [18,22], la courbe est symétrique de la courbe sur [0,4], c'est donc un segment de droite.)

5. Donnez la valeur de V(x) pour chacune des deux valeurs de x : x=5 ; x=10. Les résultats seront arrondis au dixième de kilomètre et justifiés.

- quand x = 5, M est sur [AJ], le triangle IAM est rectangle en A, en lui appliquant le théorème de Pythagore on obtient : $IM^2 = IA^2 + AM^2 = 16 + 1 = 17$; $IM = \sqrt{17} \approx 1,4$

- quand x = 10, M est sur [BK], le triangle IKM est rectangle en K, en lui appliquant le théorème de Pythagore on obtient : $IM^2 = IK^2 + KM^2 = 9 + 1 = 10$, $IM = \sqrt{10} \approx 3,2$

6. Pour les vétérans, on souhaite réduire le parcours de 25%. Proposez de nouvelles mesures pour le rectangle ABCD.

Réduire le parcours de 25%, est équivalent à réduire le périmètre du rectangle de 25%, c'est-à-dire d'un quart. Pour cela, il suffit de réduire chacune des dimensions du rectangle de un quart. Je propose donc de prendre un nouveau rectangle de longueur 6 km (3/4 × 8) et de largeur 2,25 km (3/4 × 3).

Toute autre réponse bien justifiée sera acceptée (une réponse basée par exemple sur le calcul de l'ancien périmètre (22 km), sur celui du nouveau périmètre (16,5 km) et sur la recherche de rectangles ayant un périmètre de 16,5 km sera acceptée, la question ne demandant pas que la « forme » du rectangle (réduction au sens géométrique) soit conservée.