CORRIGE ET BAREME

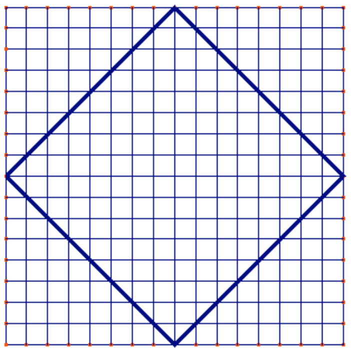
- **EXERCICE 1**

1) Justifier que ces deux surfaces A et B ont même aire.

Aire de B : il s'agit d'un rectangle dont les dimensions sont 4cm et 8 cm donc l'aire est de $32cm^2$
Aire de A : la surface A peut se décomposer en une bande rectangulaire au milieu de dimensions 1cm et 8cm donc de $8cm^2$ et 4 triangles rectangles identiques dont les côtés mesurent 4cm et 3cm donc 4 triangles de $6cm^2$ chacun. Donc l'aire de A est de $32cm^2$ aussi.
*On peut aussi évoquer des décompositions en triangles rectangles suivies de recompositions en rectangles.
*D'autres décompositions de A sont possibles, par exemple deux trapèzes isocèles dont les bases ont une longueur de 1cm et 7cm et utiliser la formule qui donne l'aire d'un trapèze (demi somme des longueurs des bases multiplié par la hauteur du trapèze) .
*On peut aussi admettre un dénombrement de cases (et non de cm^2) avec les procédés précédents.

2) Tracé d'un carré C ayant la même aire que A et B à l'aide de la règle non graduée et du papier quadrillé.

Quadrilatère tracé :



Le quadrilatère tracé est un carré.
Exemples de justifications possibles :
* 4 côtés de même longueur (diagonales de carrés de 4cm de côté) et des côtés consécutifs qui sont perpendiculaires (diagonales de carrés formant des angles de 45° avec les côtés)
* diagonales du quadrilatère perpendiculaire, de même longueur et ayant même milieu.

Le carré tracé a même aire que les surfaces A et B.
Exemples de justifications possibles :
* Les côtés du carré sont des diagonales de carrés de 4cm de côté et on donc une longueur de $4\sqrt{2}$ cm. L'aire du carré est donc de $(4\sqrt{2})^2$ cm^2 c'est à dire 32 cm^2.
* Le carré tracé est obtenu par pavage de 4 triangles rectangles isocèles d'aire $8cm^2$ (4 moitiés de carrés de 4cm de côté)
* Le carré tracé est un losange dont les diagonales ont une longueur de 8cm (aire d'un losange = demi produit des longueurs des diagonales)

3) Mesures exactes et comparaison des périmètres de A, B, C et D.

Périmètre de A : $2 + 4\sqrt{3^2+4^2} = 2 + 4x5$ = 22
Périmètre de B : 4x8 = 32
Périmètre de C : $4x\sqrt{32}$ $= 4\sqrt{32} = 16\sqrt{2}$
Périmètre de D : $2\pi\sqrt{32/\pi}$ $= 8\sqrt{2\pi}$ ($\sqrt{32/\pi}$ étant le rayon d'un cercle d'aire 32)

On peut comparer les périmètres en comparant les valeurs approchées au dixième près obtenues avec la calculette ; respectivement 22 32 22,6 et 20
Pour comparer ces valeurs positives on peut comparer leurs carrés :
$(22)^2 = 22x22 = 4x121 = 484$
$(32)^2 = 32x32 = 4x 256 = 1024$
$(4\sqrt{32})^2 = 16x32 = 4x 128 = 512$
$(8\sqrt{2\pi})^2 = 128 x pi = 4x 32\pi = 128 \pi = 402$ à 1 près par défaut.

En conclusion : Périmètre de D < Périmètre de A < Périmètre de C < Périmètre de B

Questions complémentaires :

4 a) Quelle compétence essentielle peut-on évaluer à travers la résolution de la question 1 ? A quel niveau de classe peut-on la proposer ?

Dans le domaine des grandeurs, les aires sont étudiées au cycle 3.
Par les moyens permis qu'elle évoque pour comparer les aires des surfaces A et B, cette question entre dans le cadre où les élèves doivent d'après le programme savoir *« classer et ranger des surfaces (figures) selon leur aire, soit par superposition des surfaces, soit par découpage et recollement des surfaces, soit par pavage des surfaces avec une surface de référence ».*
D'après les documents d'application, cette compétence entre dans une démarche d'approche et de préparation dans la première année du cycle 3 et dans une démarche de construction et de structuration dans les deux dernières années. A priori comme cette question est mise en parallèle avec une question comparant les périmètres de ces surfaces (avec l'idée que des surfaces qui ont même aire n'ont pas nécessairement même périmètre) nous sommes, toujours en nous référant aux indications des documents d'application, dans le cadre des deux dernières années du cycle 3.

Commentaire : Les procédures que le maître peut attendre dépendent évidemment du travail déjà développé précédemment avec ses élèves. Mais en considérant l'énoncé (en particulier les moyens qui sont proposés, on ne demande pas aux élèves explicitement de savoir « mesurer » l'aire d'une surface. Le réseau quadrillé sur lequel sont placées les figures incite bien sûr à s'appuyer sur le quadrillage, soit pour décomposer et découper A en surfaces pour les recomposer et obtenir B (le papier calque peut être utile pour cela), soit en prenant le carreau comme surface de référence et en comparant ainsi le nombres de carreaux. Dans un cas comme dans l'autre les décompositions et recompositions des surfaces pour comparer leurs aires restent libres. Attention, la question ne permet pas d'évaluer si un élève sait ou ne sait pas « calculer » l'aire d'un rectangle en fonction de ses dimensions.

4 b) Indiquer deux procédures de résolution correcte de la question 2 de cet exercice qu'un élève de ce niveau de classe pourrait utiliser.

L'utilisation d'une règle graduée étant exclue et certains segments n'étant pas supportés par les lignes du quadrillage, les élèves ne peuvent pas mesurer les segments et calculer les périmètres mais seulement comparer les périmètres en mettant bout à bout les segments qui composent les deux polygones:
- soit directement avec des bandelettes en marquant directement les repères successifs pour chaque polygone.
- soit indirectement avec le compas ou le papier calque en reportant successivement les longueurs des différents segments sur une droite.

5 a) Relever et analyser la (ou les) erreur(s) ou maladresse(s) de cet élève.

Pour la question 1 :
L'élève dit qu il a compté « les carreaux à l'intérieur ». Dans les deux cas le dénombrement n'est pas correct.

Surface B : il recourt à une multiplication qui devrait être 8x16 et non 8x15.
Analyse de l'erreur : 8 correspond vraisemblablement au pointage du nombre de carreaux par ligne horizontale et 15 au nombre de lignes. Ce faisant il oublie de compter la première ligne, qu'il oublie parce qu'elle est déjà pointé.
Surface A : il décompose la surface en 4 surfaces de même aire et pour une de ces surfaces il dénombre correctement et directement le nombre de carreaux entiers (26) qu'elle comporte.
Erreur : Il se réfère ensuite aux nombres de carreaux de B et estime que la place occupée par les carreaux non entiers de A ne peut pas combler le complément qu'il faudrait pour atteindre le nombre de carreaux de B (cette estimation serait encore renforcée aux yeux de l'élève si le nombres de carreaux de B avait été correctement déterminé).
Analyse de l'erreur : l'élève procède par estimation qui aboutit pour lui à l'évidence que la place restante ne peut correspondre à 16 carreaux. On peut penser qu'il a pris comme référence uniquement une des quatre surfaces, celle dans laquelle il a dénombré les 26 carreaux entiers.
Pour la question 2 : Le quadrillage permet de déterminer une surface de référence (le carreau) pour les aires mais aussi un segment (côté d'un carreau) qui peut servir de référence pour les longueurs de segments joignant horizontalement ou verticalement deux nœuds du quadrillage.
Pour le polygone B : l'élève confond les deux référents en comptant le nombre de carreaux constituant le pourtour de la surface B. Ce faisant, il oublie que les carreaux placés aux sommets du rectangle représentent chaque fois 2 segments référents.
Pour le polygone A : pour les segments qui ne suivent pas les lignes du quadrillage, l'élève dénombre les côtés des carreaux entiers qui délimitent les surfaces constituées de carreaux entiers. Ce faisant, il assimile les segments aux lignes brisées s'appuyant sur le quadrillage qui les approchent.

5 b) Au vu de cette production, dresser un bilan des acquis de l'élève.
L'élève sait :
Dans le domaine de la géométrie et des grandeurs :
- différencier aire et périmètre d'une surface (même si les moyens pour comparer et déterminer les aires ou les périmètres ne sont pas maîtrisés)
- réaliser une décomposition d'une surface en surfaces pour déterminer l'aire de la surface totale.
- organiser le calcul d'un périmètre en regroupant les côtés qui ont même longueur (périmètre de A).

Dans le domaine numérique :
- calculer un produit de nombres entier (par quel moyen on ne le sait pas)
- résoudre un problème de type additif correspondant à une addition à trou (détermination du 16 pour l'aire de A à partit de l'aire de B)
- organiser un calcul comportant des additions et des multiplications (périmètre de A)

Domaine transversal :
- expliquer ses choix

- **EXERCICE 2**

1) D'après les données de l'énoncé, on a : $N = \overline{mcdu}$ (m, c, d et u étant des chiffres),
$1000 \leq N < 2000$ donc m = 1 ; c = d, donc N = $\overline{1ddu}$.
d peut prendre 10 valeurs (de 0 à 9) et u 10 valeurs aussi.
Il existe donc 10 x 10 = 100 nombres N différents.

2) Le plus grand nombre N multiple de 4 est 1996. C'est un multiple de 4 (le nombre formé par les 2 derniers chiffres l'est) et 1996 = 499 x 4 et le multiple de 4 suivant :
500 x 4 = 2000 est trop grand (N doit être inférieur à 2000).

3) Pour que N soit un multiple de 3 il faut que 1 + d + d + u = 3 k (k entier naturel).
Pour que N soit un multiple de 5, il faut que u = 0 ou que u = 5.
Si u = 0, il faut que 2d + 1 soit un multiple de 3 les valeurs possibles pour d sont : 1 ; 4 ; 7.
Si u = 5 il faut que 6 + 2d soit un multiple de 3 ; les valeurs possibles pour d sont : 0 ; 3 ; 6 ; 9.
Les nombres N solutions sont : 1110 ; 1440 ; 1770 ; 1005 ; 1335 ; 1665 ; 1995

Questions complémentaires :
4) a) Compétences à mobiliser pour résoudre ces devinettes :
- Connaître le vocabulaire : unités, dizaines, centaines
- Trouver l'écriture décimale d'un nombre à partir d'informations données en « nombre de dizaines, nombre d'unités, … »
- Savoir pratiquer des échanges (entre dizaines et centaines) .
- Savoir multiplier un multiple de 10 par un nombre à un chiffre
- Citer le nombre qui précède un nombre donné.

b) On peut proposer ces cartes à partir de la fin du cycle 2 (fin CE1) car le domaine numérique (nombres inférieurs à 1000) et les compétences en jeu (cf. ci-dessus) relèvent de la fin de ce cycle.
Remarque : le programme indique qu'au cycle 2 l'utilisation du vocabulaire (dizaine, centaine) ne constitue pas un objectif prioritaire et que les expressions « paquet de dix, paquet de cent » sont plus explicites. En cycle 3 les indications précisent que ces mots (dizaine, centaine…) sont employés comme synonymes et reformulés sous la forme de paquets de 10, 100…
Une réponse du type début du cycle 3 bien argumentée est ainsi recevable aussi.

c) Autres cartes possibles :

Carte 1	carte 2	carte 3	carte 4
C'est un nombre à 3 chiffres. Il est égal à deux cent soixante- treize.	*C'est un nombre à 3 chiffres.* **C'est le double de 60.**	*C'est un nombre à 3 chiffres.* **C'est le suivant de 799.**	*C'est un nombre à 3 chiffres.* **C'est le plus grand de ces trois nombres :** 345 : 543 : 453

Compétences associées :
- carte 1 : associer désignation en lettres et écriture chiffrée
- carte 2 : connaître les doubles des dizaines entières (relation arithmétique)
- carte 3 : savoir trouver le suivant d'un nombre
- carte 4 : savoir comparer des nombres.

6) a) Deux procédures exactes utilisables par les enfants pour déterminer le nombre de :
La carte n°1
- Procédure de type calcul :
2 d 7 u 1 c est transcrit en 20 , 7 et 100 puis l'élève calcule la somme : 20 + 7 +100.
- Procédure s'appuyant uniquement sur la valeur positionnelle des chiffres :
2 d 7 u 1 c est remis en ordre : 1 c 2 d 7 u ce qui donne directement 127.

La carte n°3
- Calcul réfléchi utilisant les dizaines : 20 c'est 2 dizaines ; 6x20 c'est donc « (6 fois 2) dizaines », soit 12 dizaines , ce qui s'écrit 120 (ou l'élève sait que 10 dizaines c'est 100).
- Retour à l'addition réitérée : 6 x 20 = 20 + 20 + 20 + …+ 20 ; cette somme pouvant être réduite (en regroupant les termes trois par trois) en 60 + 60
- Utilisation de la règle des zéros

b) Intérêt d'indiquer sur les cartes le nombre de chiffres composant le nombre à trouver :
A priori cette indication semble superflue mais elle constitue une aide à la recherche et permet surtout aux élèves d'invalider des résultats qui ne respecteraient pas cette contrainte et de reprendre leur recherche (exemple pour la carte 1 : si l'élève traduit 2dizaines, 7unités et 1 centaine par 100207)

- **EXERCICE 3**

1) a) Nombre d'heures total de la semaine : $7 \times 24 = 168$.
Le caissier travaille 8 h le lundi, 8 h 30 le mardi, 9 h 30 le jeudi et 7 h le vendredi.
Nombre d'heures de travail hebdomadaire 8 + 8,5 + 9,5 + 7 = 33

Fraction de la semaine que ce travail représente : $\frac{33}{168}=\frac{11}{56}$

b) Fraction de l'horaire total hebdomadaire de travail représenté par les heures du jeudi :
$\frac{9,5}{33}=\frac{95}{330}=\frac{19}{66}$

c) Le caissier aura achevé le quart de son horaire hebdomadaire, quand il aura travaillé 33/4 h soit 8,25 h ou 8 h 15 minutes c'est à dire le mardi à 9h 15.

2) a) Un nombre décimal est un nombre rationnel qui admet une écriture fractionnaire avec un dénominateur égal à une puissance de 10. Pour que cela puisse être le cas, il faut que le dénominateur de sa forme irréductible soit un produit d'une puissance de 2 par une puissance de 5.
$\frac{x}{840}=\frac{x}{2^3\times3\times5\times7}$. Pour que cette fraction représente un nombre décimal, il faut donc pouvoir la simplifier par 21.
Le plus petit numérateur possible pour cela est donc le plus petit multiple de 21 c'est à dire 21.
La plus petite valeur de x pour que la fraction x/840 représente un nombre décimal est donc 21 et ce nombre décimal est alors 0,025.
En effet :

$$\frac{3\times7}{2^3\times3\times5\times7}=\frac{1}{2^3\times5}=\frac{5^2}{2^3\times5^3}=\frac{25}{1000}=(0,025).$$

3) La fraction $\frac{8}{x+1}$ est irréductible si et seulement si 8 et (x + 1) n'ont pas de diviseurs communs autre que 1. Or 8 = 2 × 2 × 2, donc (x + 1) ne doit pas être divisible par 2.
Le nombre (x + 1) doit être impair. D'où si (x + 1) est impair alors x est pair.
$\frac{8}{x+1}$ est irréductible pour tous les entiers naturels x pairs.

- **EXERCICE 4**

1) Calcul de la superficie totale des appartements :
$3\times35+2\times60+2\times75+3\times100=675m^2$

Charges pour : - un studio : $35\times\frac{20040}{675}=\frac{9352}{9}\approx1039,11€$

- un F2 : $60\times\frac{20040}{675}=\frac{5344}{3}\approx1781,33€$

- un F3 : $75\times\frac{20040}{675}=\frac{6680}{3}\approx2226,67€$

- un F4 : $100\times\frac{20040}{675}=\frac{26720}{9}\approx2968,89€$

2) a) Calcul du prix hors taxes du véhicule :
Si x désigne le prix hors taxes du véhicule en Irlande, les données de l'énoncé se traduisent par :
$x+\frac{21}{100}x=11495$ d'où : $x=\frac{11495}{1,21}=9500€$

Calcul du prix TTC du véhicule en Italie :

Le prix hors taxes du véhicule étant le même dans les deux pays, le prix TTC du véhicule en Italie sera égal à : $9500+9500\times\frac{20}{100}=9500\times1,2=11400€$.

b) L a différence de prix est de : $11495-11400=95€$
Or 1% de 11495 revient à 114,95€. Il est donc faux de dire que l'achat du véhicule revient 1% moins cher en Italie. *(ou toute autre justification consistant, par exemple, à calculer le quotient différence de prix/prix TTC en Irlande)*

Proposition de barème

→ EX 1 :
- question 1 : 1 point
- question 2 : 1 point
- question 3 : 1 point

Questions complémentaires :
- question 4 a : 1 point
- question 4 b : 0,5 points
- question 5 a : 2 points
- question 5 b : 1 point

→ EX2 : 7 points
Q 1 : 1pt
Q2 : 0, 5 pt
Q 3 : 1,5 pt si les 7 nombres sont trouvés avec explication qui prouve l'exhaustivité ; 0,75 s'il en manque mais raisonnement correct ; 0,25 si aucune explication
Questions complémentaires :
Q4 : a) : 1 pt : (0,25 pt par compétence)
b) : 0,5 pour 2 arguments
c) 1 pt : (0,5 pt pour une carte **et** la compétence de numération associée)
Q 5 : a) : 1 pt : (0,25 par procédure)
b) : 0,5 pt

→ EX 3 (3 pts)
Q1 : a) 0,5 pt si fraction simplifiée - 0,25 si pas simplifiée
: b) 0, 5 pt
: c) 0,5 pt si irréductible, 0,25 pt si pas entier/entier
Q2 : 0,75 pt (0,5 pour une explication correcte ; 0,25 pour la plus petite valeur de x)
Q3 : 0,75 pt (0,25 pour une réponse partielle)

→EX 4 :
Q1 : 1 pt (0,25 pour la superficie totale, 0,25 pour un arrondi correct , 0,5 pour le principe de proportionnalité respecté)
Q2 : a) 1 pt
b) 1 pt