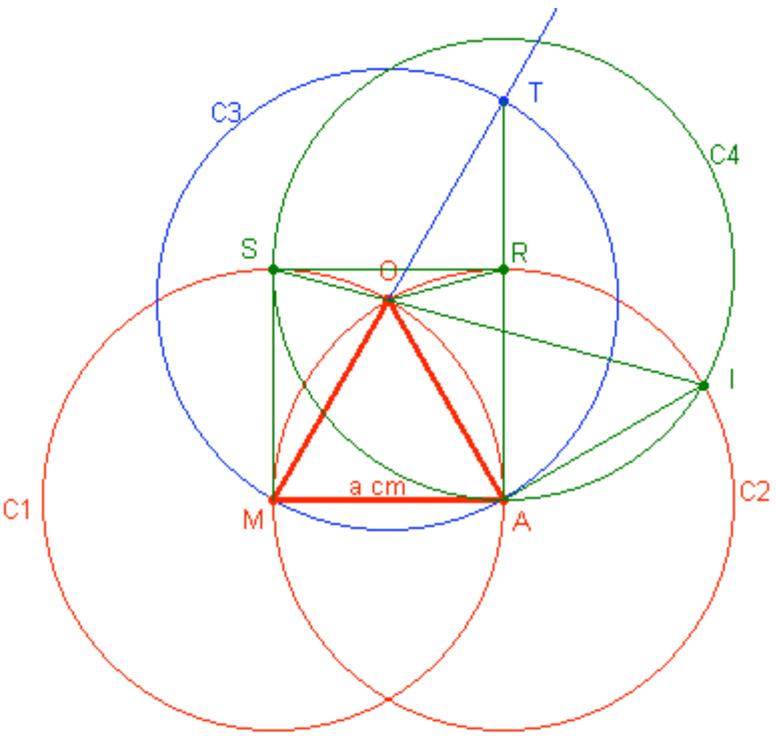
Exercice n° 1

1°)



- Par hypothèse, MA = a cm
- O est sur le cercle de centre M et de rayon a cm donc OM = a cm
- O est sur le cercle de centre A et de rayon a cm donc OA = a cm

MA = OM = OA donc **le triangle MOA est équilatéral.**

2°) [MT] est un diamètre du cercle C3 et A est un point de ce même cercle donc **le triangle MAT est rectangle en A** (théorème concernant les triangles "inscrits dans un demi-cercle").

3°)

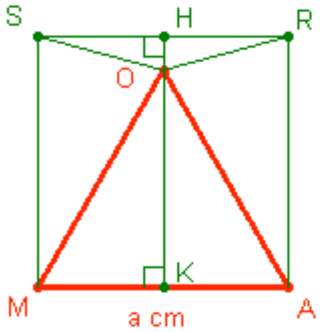
1)- M est sur le cercle C2 de centre A et de rayon a cm donc AM = a cm
- S est sur le cercle C1 de centre M et de rayon a cm donc MS = a cm
- S est sur le cercle C4 de centre R et de rayon a cm donc SR = a cm
- R est sur le cercle C2 de centre A et de rayon a cm donc RA = a cm

On en déduit que le quadrilatère MARS est un losange.

Par ailleurs on a démontré que l'angle $\widehat{RAM}$ est un angle droit (voir 2°).

Le quadrilatère MARS est un losange qui a un angle droit.
Le quadrilatère MARS est donc un carré.

2) Le triangle MOA est équilatéral (voir 1°) donc MO = OA donc O est sur la médiatrice de [MA]
Par ailleurs, le quadrilatère MARS est un carré (voir 3°- 1) donc la médiatrice de [MA] est aussi la médiatrice de [SR].
On en déduit que O est aussi sur la médiatrice de [SR] et donc que OS = OR.
Le triangle SOR, dont les côtés [OS] et [OR] ont même longueur, est un triangle isocèle de sommet O.
Soit H le milieu de [SR] et K le milieu de [MA] :



Calcul de OK :

D'après le théorème de Pythagore, $OM^2 = OK?+KM?$

Donc $OK? = OM?-KM? = a?-\left(\frac{a}{2}\right)^2 = a?-\frac{a?}{4} = \frac{3a?}{4}$.

D'où : $OK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Calcul de HO :

$HO = HK - KO = a - \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Calcul de SO :

D'après le théorème de Pythagore,

$$SO? = SH?+HO? = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(a - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = a^2 ? \left[\frac{1}{4} + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right] = a^2 ? \left[\frac{1}{4} + \frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{4}\right]$$

$$= \frac{a^2}{4} ? \left[1 + \left(2-\sqrt{3}\right)^2\right] = \frac{a^2}{4} ? \left(1+4-4\sqrt{3}+3\right) = \frac{a^2}{4} ? (8-4\sqrt{3}) = a?\left(2-\sqrt{3}\right)$$

Donc $\color{blue}{\mathbf{SO = a\sqrt{2-\sqrt{3}}}}$.

3)
O est sur le cercle C2 de centre A et de rayon a cm donc OA = a cm
I est sur le cercle C2 de centre A et de rayon a cm donc AI = a cm.
On en déduit que **le triangle OAI est un triangle isocèle de sommet A.**

Par ailleurs :

$\widehat{OAI} = \widehat{OAR} + \widehat{RAI} = (\widehat{MAR} - \widehat{MAO}) + \widehat{RAI} = (90° - 60°) + \widehat{RAI} = 30° + \widehat{RAI}$

Comme RAI est un triangle équilatéral, car RA = AI = RI = a cm

(par construction des points R, A et I), on sait, de plus, que $\widehat{RAI} = 60°$.

On en déduit donc que $\mathbf{\widehat{OAI} = 30° + 60° = 90°}$.

Donc, **le triangle OAI est un triangle rectangle isocèle de sommet A.**

D'après le théorème de Pythagore,
$OI? = OA?+AI? = 2a^2$ donc $\mathbf{OI = a\sqrt{2}}$.

4)

Calcul de la mesure de l'angle $\widehat{SOM}$:

Le triangle MSO est un triangle isocèle (car, par construction, MS = MO = a cm) donc :

$$\widehat{SOM} = \frac{180° - \widehat{SMO}}{2} = \frac{180° - (\widehat{SMA} - \widehat{OMA})}{2} = \frac{180° - (90° - 60°)}{2} = 75°.$$

Calcul de la mesure de l'angle $\widehat{AOI}$:

Le triangle OAI est un triangle rectangle isocèle en A donc $\widehat{AOI} = 45°$.

Calcul de la mesure de l'angle $\widehat{SOI}$:

$$\widehat{SOI} = \widehat{SOM} + \widehat{MOA} + \widehat{AOI} = 75° + 60° + 45° = 180°.$$

L'angle $\widehat{SOI}$ est un angle plat donc les points S, O et I sont alignés.

Calcul de SI :

$$\mathbf{SI} = SO + OI = a\sqrt{2-\sqrt{3}} + a\sqrt{2} = \mathbf{a\left(\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2}\right)}.$$

Questions complémentaires :

4°)

A l'école primaire, il ne peut être question de "démontrer", verbe qui fait référence à une géométrie hypothético-déductive qui ne sera abordée qu'au collège.
Au cycle 3, un objectif important annoncé par les programmes est de "passer progressivement d'une géométrie où les objets sont contrôlés par la perception à une géométrie où ils le sont par un recours à des instruments et par la connaissance de leurs propriétés".

On peut donc, par exemple, poser la question suivante : "Le triangle MAO est-il équilatéral ? Justifie ta réponse".

Les réponses recevables peuvent être, par exemple, les suivantes :

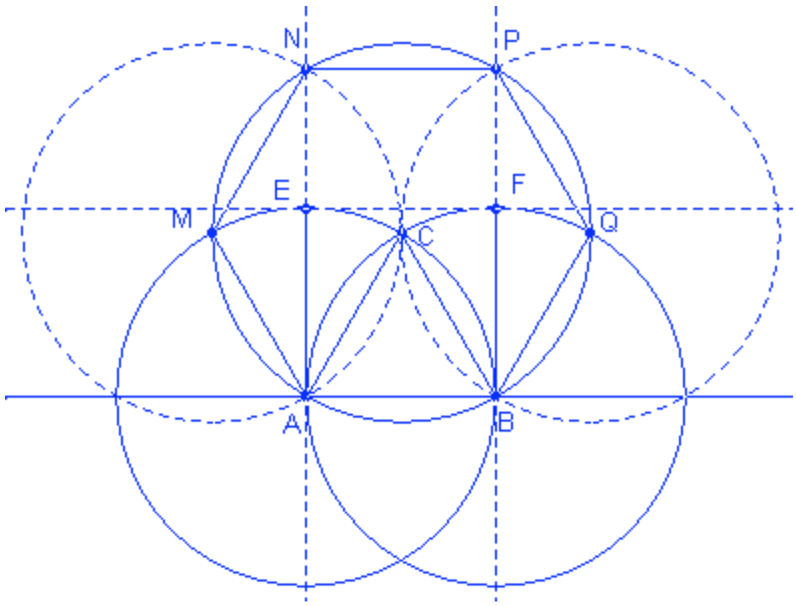
- "J'ai mesuré ; le triangle a trois côtés de même longueur"

ou

- "On a trois rayons de cercle de même rayon"

5°)

1)



2)

2 Trace le cercle de centre A qui passe par B.

3 Trace le cercle de centre B qui passe par A.

5 Trace le cercle de centre C qui passe par A et B. Appelle M le deuxième point d'intersection entre ce cercle de centre C et le cercle de centre A.

Appelle Q le deuxième point d'intersection entre le cercle de centre C et le cercle de centre B.

6 Trace le cercle de centre M qui passe par A et C. Appelle N le deuxième point d'intersection entre ce cercle de centre M et le cercle de centre C.

7 Trace le cercle de centre Q qui passe par B. Appelle M le deuxième point d'intersection entre ce cercle de centre Q et le cercle de centre C.

9 Trace la droite qui passe par A et N. Appelle E le point d'intersection du cercle de centre A et du segment AN.

10 Trace la droite qui passe par B et P. Appelle F le point d'intersection du cercle de B et du segment BP.

11 Trace la droite passant par E et F.

12 Trace le carré AEFB.

3) La tâche de l'élève n'est pas bien explicitée.
On peut envisager plusieurs compléments correspondant à des tâches différentes.
Complément 1 : Reproduis la figure
Complément 2 : Rédige les étapes non écrites du programme de construction

Complément 3 : Reproduis la figure et rédige les étapes non construites du programme de construction.

4) On supposera pour cette question que la tâche de l'élève consiste uniquement à reproduire la figure.
L'élève doit savoir lire un énoncé comportant une figure et un texte et savoir mettre ces deux éléments en correspondance (remarque : il est aidé par les numéros qui figurent dans le texte et sur la figure et qui correspondent aux constructions successives à effectuer mais certains des numéros apparaissent uniquement sur la figure alors que les autres n'apparaissent que dans le texte).

5) On supposera également pour cette question que la tâche de l'élève consiste uniquement à reproduire la figure.
L'élève doit savoir :
- identifier des figures simples dans une configuration plus complexe
- tracer un cercle de centre donné passant par un point donné
- tracer une droite passant par deux points

Exercice n° 2

1°)

a) Le périmètre de la base du cylindre A vaut 30 cm (longueur de la feuille).

b) Soit R le rayon de base du cylindre A et soit V le volume de ce cylindre.
On a vu que le périmètre de la base du cylindre vaut 30 cm soit 3 dm.
On en déduit que $2\pi R = 3$ et donc que $R = \dfrac{1{,}5}{\pi}$ (en dm).

$$V = \pi R? \times h = \pi \times \left(\frac{1{,}5}{\pi}\right)^2 \text{ x } 2{,}1 = \frac{1{,}5^2 \times 2{,}1}{\pi} = \frac{4{,}725}{\pi} \quad (\text{en dm}^3)$$

$V \approx 1{,}504$ (en dm^3)

2°)

Soit R' le rayon de base du cylindre A' et soit V' le volume de ce cylindre.
Le périmètre de la base du cylindre vaut 21 cm soit 2,1 dm.
On en déduit que $2\pi R' = 2{,}1$ et donc que $R' = \dfrac{1{,}05}{\pi}$ (en dm).

$$V' = \pi R'? \times h' = \pi \times \left(\frac{1{,}05}{\pi}\right)^2 \text{ x } 3 = \frac{1{,}05^2 \times 3}{\pi} = \frac{3{,}3075}{\pi} \quad (\text{en dm}^3)$$

$V' \approx 1{,}053$ (en dm^3)

C'est le cylindre A qui a le plus grand volume (car $\dfrac{4{,}725}{\pi} > \dfrac{3{,}3075}{\pi}$).

3°)

L'aire latérale de chaque cylindre vaut 2,1 x 3 soit 6,3 (en dm²)

4°)

L'aire totale du cylindre A vaut : $6{,}3 + 2\pi R^2$ soit $6{,}3 + 2\pi? \left(\dfrac{1{,}5}{\pi}\right)^2$ soit $6{,}3 + \dfrac{4{,}5}{\pi}$ (en dm?)
Valeur approchée : 7,73 (en dm?)

L'aire totale du cylindre B vaut : $6{,}3 + 2\pi R^2$ soit $6{,}3+2\pi?\left(\frac{1{,}05}{\pi}\right)^2$ soit $6{,}3+\frac{2{,}205}{\pi}$ (en dm?)
Valeur approchée : 7,00 (en dm?)

Exercice n° 3

1°)

Proposition A

Soit n un nombre entier dont l'écriture se termine par 2.
n s'écrit 10p+2 avec p entier donc $n^2 = (10p+2)^2 = 100p^2+40p+4=10(10p^2+4p)+4$
$= 10k+4$ avec k entier

Donc l'écriture de n² se termine par 4.
La proposition A est vraie.

Proposition B

14 est un nombre dont l'écriture se termine par 4.
14² vaut 196 donc l'écriture de 14² ne se termine pas par 16.
La proposition B est fausse.

2°)

Soit $n = \overline{a5}$ (on a donc n =10a +5).

$15 \leq n \leq 95$ donc $15? \leq n^2 \leq 95^2$ (car la fonction carré est une fonction croissante sur l'intervalle $[15\ ;\ 95]$).
Donc : $225 \leq n^2 \leq 9025$.
Donc n² s'écrit avec quatre chiffres au plus.

$n^2 = (10a + 5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 = 100(a^2+a) + 25$.
Donc l'écriture de n² se termine par 25 et le nombre de centaines de n² est $a^2 + a$.

Exercice n° 4

Problème 1

Décomposition de 285 en un produit de facteurs premiers : 285 = 3×5×285
Les diviseurs de 285 sont les nombres 1, 3, 5,15,19, 57, 95 et 285.
D'où les solutions possibles :
1 bille et 285 billes
3 billes et 95 billes
5 billes et 57 billes
15 billes et 19 billes.

Problème 2

Décomposition de 2431 en un produit de facteurs premiers : 2431 = 11x13×17
d'où toutes les solutions possibles :
Une des sommes vaut 1€, une autre vaut 11€ et la dernière vaut 13 x 17€ soit 221€
Une des sommes vaut 1€, une autre vaut 13 € et la dernière vaut 11 x 17€ soit 187€
Une des sommes vaut 1€, une autre vaut 17€ et la dernière vaut 11×13€ soit 143 €
Une de sommes vaut 11€, une autre vaut 13€ et la troisième vaut 17€.

Problème 3

Soit n le nombre de gagnants.

On sait que 129n +28 <4000 donc 128n<3972 donc $n < \frac{3972}{129}$.

Or $\frac{3972}{129} \approx 30{,}8$.

donc le nombre maximum de gagnants est égal à 30.

On en déduit que le montant maximal de la cagnotte est égal à (129x30+28)€ soit 3898 €.

Questions complémentaires

1) On peut envisager la classification suivante explicitée, en particulier, dans le document d'accompagnement des programmes intitulé "Les problèmes pour chercher" :
- problèmes dont la résolution vise à la construction d'une nouvelle connaissance (correspondant à la notion de situation-problème en didactique)
- problèmes destinés à permettre le réinvestissement de connaissances déjà travaillées, à les exercer (problèmes "simples" ou problèmes plus complexes dont la résolution nécessite la mobilisation de plusieurs catégories de connaissances")
- problèmes "pour chercher" (problèmes centrés sur le développement des capacités à chercher qu'on appelle aussi "problèmes ouverts")

2) Les trois problèmes proposés relèvent, de mon point de vue, de la troisième catégorie.

On peut également remarquer que :
- les trois énoncés sont présentés sous forme de texte (alors que d'autres énoncés peuvent faire appel à des figures, des tableaux, des schémas, ...)
- la résolution de chacun de ces problèmes demande aux élèves de mettre en œuvre des procédures personnelles (alors que d'autres font appel à des procédures expertes)
- les deux premiers problèmes admettent plusieurs solutions alors que le troisième en admet une seule.