

Session 2009

MAT-09-PG5

Repère à reporter sur la copie

CONCOURS DE RECRUTEMENT DE PROFESSEURS DES ECOLES

Mercredi 29 avril 2009 - de 8h 00 à 11h 00
Deuxième épreuve d'admissibilité

MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures
Coefficient : 3
Note éliminatoire 5/20

Rappel de la notation :

Il est tenu compte, à hauteur de **trois points** maximum, de la qualité orthographique de la production des candidats.

Ce sujet contient 7 pages (dont 1 page de garde et 2 pages d'annexes), numérotées de 1/7 à 7/7. Assurez-vous que cet exemplaire est complet.

S'il est incomplet, demandez un autre exemplaire au chef de salle.

L'usage d'une calculatrice électronique de poche à fonctionnement autonome, sans imprimante est autorisé.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

N.B : Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez devra, conformément au principe d'anonymat, ne comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine etc.

Tout manquement à cette règle entraîne l'élimination du candidat.

Si vous estimez que le texte du sujet, de ses questions ou de ses annexes comporte une erreur, signalez lisiblement votre remarque dans votre copie et poursuivez l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

Énoncé

Exercice 1 : (4 points)

Soit ABCD un quadrilatère quelconque dont les diagonales [AC] et [BD] se coupent en O.

Soit I le milieu de [AB], J le milieu de [BC], K le milieu de [CD] et L le milieu de [DA].

Étude du quadrilatère IJKL

- a) Démontrer que la droite (IJ) est parallèle à la droite (AC).
b) Démontrer que le quadrilatère IJKL est un parallélogramme.
- Dans chaque cas, une ou plusieurs affirmations proposées sont exactes. Le candidat indiquera sur sa copie la référence de la question et la (ou les) lettre(s) correspondant à l'(ou aux) affirmation(s) qu'il estime exacte(s). Aucune justification n'est demandée.

a) Si ABCD est un losange, alors IJKL est toujours :

A : un parallélogramme B : un losange C : un rectangle D : un carré.

b) Si ABCD est un carré, alors IJKL est toujours :

A : un parallélogramme B : un losange C : un rectangle D : un carré.

- Démontrer que si ABCD est un rectangle, alors IJKL est un losange.

Calculs d'aires

On suppose désormais que le quadrilatère ABCD est un carré (cf. figure 1).

Soit N le milieu de [IJ], P le milieu de [JK], Q le milieu de [KL], M le milieu de [LI].

Soit a l'aire du carré ABCD.

- a) Démontrer que l'aire du quadrilatère IJKL est $\frac{a}{2}$.
b) Exprimer l'aire du quadrilatère MNPQ en fonction de a .

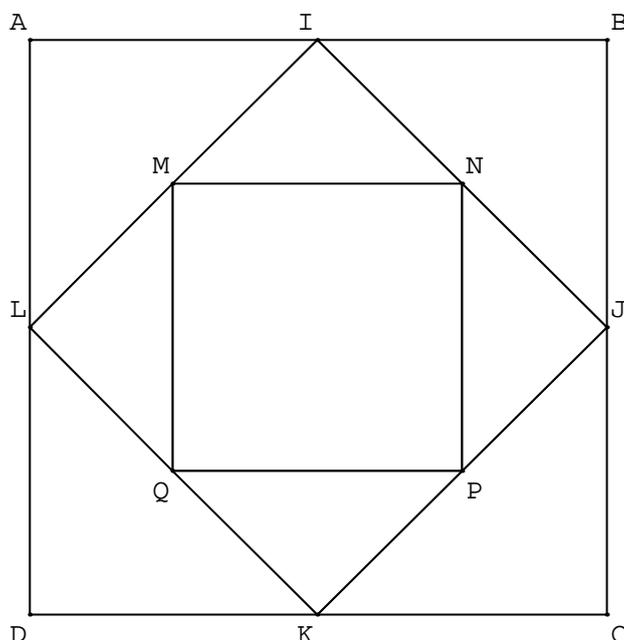


Figure 1

Questions complémentaires (4 points)

Le document présenté en annexe 1 est extrait d'un manuel de CMI (collection Cap Maths, Editions Hatier, 2004), il comporte deux pages qui ont été réduites.

1. Citer trois types de difficultés que peuvent rencontrer les élèves pour reproduire la figure A à l'identique sur papier uni à l'aide des instruments usuels de géométrie (règle graduée, compas, équerre).
2. Pour chacune des deux figures A et B :
 - décrire la chronologie des principales étapes de sa construction qui pourrait être induite par la position de la figure dans sa page.
 - justifier cette chronologie.
3. Le guide du maître du manuel Cap Maths (collection Cap Maths, pages 46 à 48, Editions Hatier, 2004) propose le déroulement suivant :
 - la moitié de la classe reçoit la figure A, l'autre moitié reçoit la figure B,
 - la consigne est : « *Vous devez reproduire sur papier uni avec vos instruments de géométrie la figure que je vous ai distribuée. La figure reproduite doit être identique au modèle.* »
 - les élèves sont invités à réaliser la tâche prescrite.

Le maître dispose de calques de la page « figure A » et de la page « figure B ». Proposer deux utilisations différentes de ces transparents pour la suite de l'activité.

Exercice 2 (3 points) :

Au cours de l'année 2009, de nouvelles plaques d'immatriculation doivent être mises en circulation.

Chaque véhicule immatriculé possèdera désormais un numéro « à vie ».

Ce numéro est constitué de sept caractères, répartis en trois blocs :

- 1^{er} bloc : deux lettres ;
- 2^{ème} bloc : trois chiffres ;
- 3^{ème} bloc : deux lettres.

La numérotation des véhicules se fera de manière chronologique et au niveau national (de AA-001-AA à ZZ-999-ZZ), les numéros se succédant de la manière suivante :

- de AA-001-AA à AA-999-AA ;
- puis de AA-001-AB à AA-999-AB et ainsi de suite jusqu'à AA-999-AZ ;
- puis de AA-001-BA à AA-999-ZZ ;
- puis de AB-001-AA à AZ-999-ZZ ;
- puis de BA-001-AA à ZZ-999-ZZ.

Dans cet exercice les lettres utilisées dans la numérotation des véhicules sont les 26 lettres de l'alphabet.

1. Combien de véhicules devront être immatriculés pour atteindre le numéro AA-999-AZ ?
2. Montrer qu'il faut immatriculer 28 982 véhicules pour atteindre le numéro AA-011-BD.
3. Montrer que le nombre de véhicules immatriculés avant d'arriver au numéro AB-001-AA est de 675 324.
4. Au bout de combien d'années pourrait être épuisé ce système de numérotation si 7 millions de véhicules sont immatriculés chaque année ?

Questions complémentaires (4 points) :

Voici un problème proposé à des élèves de cycle 3 dans le cadre d'un atelier de résolution de problème (*Problème extrait du fichier Evariste APMEP d'après une épreuve du rallye mathématique de Maine et Loire 1991*) :

Une idée pour ranger son bureau ...

Monsieur Lordonné a rangé tous ses dossiers.

Il a numéroté le premier A, le deuxième B, le troisième C, etc ... jusqu'à Z.

Ensuite il a numéroté AA, AB, AC, etc ... jusqu'à AZ, puis BA, BB, BC, etc ... jusqu'à BZ, puis CA, CB, ... et ainsi de suite.

Le dernier dossier est numéroté EN.

Combien de dossiers Monsieur Lordonné a-t-il rangés ?

Les élèves sont invités à résoudre le problème par deux et sans aide.

Quatre productions de groupes sont présentées en *annexe 2*.

1. Décrire deux procédures permettant de résoudre ce problème.
2. Pour chacune des productions d'élèves, décrire les erreurs éventuelles et émettre des hypothèses sur leur origine (les réponses seront présentées dans un tableau).

- Le maître demande, dans un premier temps, à Lou et Charline de présenter leur production au groupe classe. Quel bénéfice l'ensemble des élèves peut-il en tirer ?
- Le maître demande, dans un second temps, à Pauline et Elise de présenter leur production au groupe classe, avant de proposer le nouveau problème « Si le dernier dossier est numéroté SV, combien de dossiers Monsieur Lordonné a-t-il rangés ? ».

Quel est l'impact escompté de cette façon de procéder ?

Exercice 3 : (5 points)

M. et Mme Durand sont mariés et sans enfant. Leur revenu imposable, pour l'année étudiée dans cet exercice, est de 50 000 €

- Sachant que ce revenu imposable a été calculé en opérant sur le revenu annuel du couple une réduction de 10%, calculer le revenu annuel du couple avant cette réduction (on arrondira le résultat à l'unité).
- Le revenu annuel de Mme Durand représente 85 % du revenu annuel de M. Durand. Quel est le revenu annuel de M. Durand ?
- Pour les couples mariés sans enfant, le nombre de parts N est égal à 2.

Calculer le montant de l'impôt à payer pour ce couple en utilisant le barème donné ci-dessous :

4 CALCULEZ LE QUOTIENT FAMILIAL CORRESPONDANT À VOTRE NOMBRE DE PARTS

Ce quotient « QF » est égal à : $\frac{R \text{ (revenu imposable)}}{N \text{ (nombre de parts)}} =$

Recherchez ci-dessous la tranche dans laquelle est situé votre quotient familial « QF » (et non pas votre revenu).

5 CALCULEZ VOTRE IMPÔT « I » À L'AIDE DU BARÈME SUIVANT :

Si	n'excède pas	5 687 €	votre impôt sera égal à : 0
votre	est supérieur à	5 687 € et inférieur ou égal à	11 344 € votre impôt sera égal à : $(R \times 0,055) - (312,79 \times N)$
« QF »	est supérieur à	11 344 € et inférieur ou égal à	25 195 € votre impôt sera égal à : $(R \times 0,14) - (1 277,03 \times N)$
$\left(\frac{R}{N}\right)$	est supérieur à	25 195 € et inférieur ou égal à	67 546 € votre impôt sera égal à : $(R \times 0,30) - (5 308,23 \times N)$
	est supérieur à	67 546 €	votre impôt sera égal à : $(R \times 0,40) - (12 062,83 \times N)$

(Source : Ministère de l'économie et des finances)

- On avait proposé à Mme Durand un autre poste lui offrant une augmentation de son revenu annuel de 1000 €

Son mari l'en avait dissuadée en lui disant : « Tu n'y songes pas ! Avec ce nouveau poste, nous allons changer de tranche et toute ton augmentation va être absorbée par les impôts. »

Son argument était-il valable ? Expliquer la réponse.

ANNEXE 1

Figure A

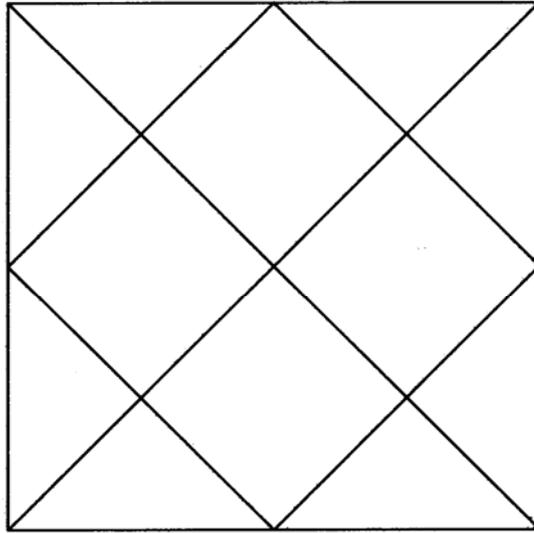
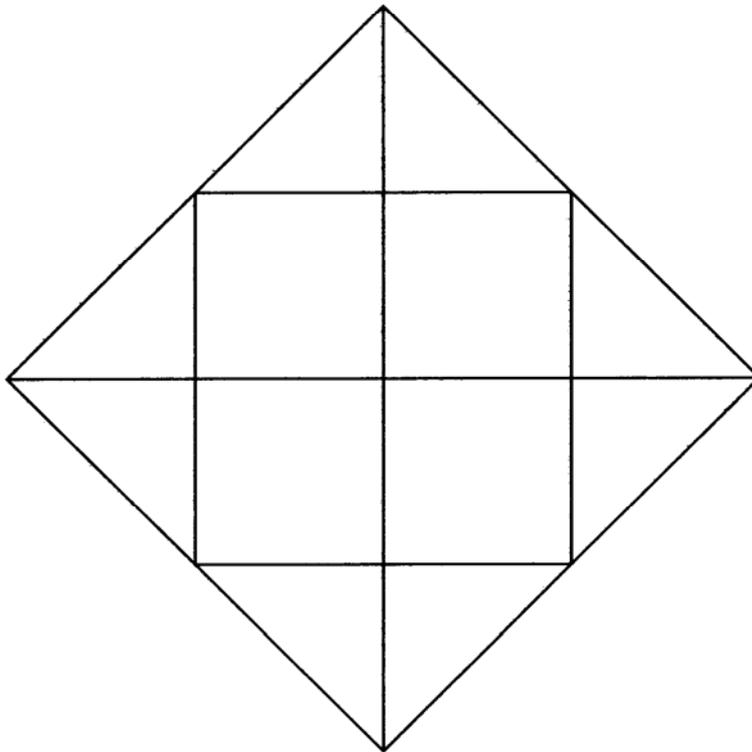


Figure B



Collection Cap Maths, Éditions Hatier, 2004

ANNEXE 2
Productions d'élèves

A B Z → 26
 Aa Bb Cc AaZz → 26
 BbAa BbCc BbDd BbZz → 26
 CcAa CcBb CcDd CcEe CcZz → 26
 DdAa DdBb DdCc DdDd DdZz → 26
 EeAa EeBb EeCc EeGg → 14

$$\begin{array}{r} 26 \quad 14 \\ \times 5 \quad + 12 \\ \hline 130 + 26 \\ \hline 156 \end{array}$$

Monsieur Lordonné a rangés 156 dossiers.

Maureen et Justine

$$\begin{array}{r} 26 \quad 130 \\ \times 5 \textcircled{5} \quad + 14 \\ \hline 130 \quad 144 \end{array}$$

Il a rangés 144 dossiers.

Pauline et Elise

1) Dans l'alphabet, il y a 26 lettres. (a)
 Aa à Zz = 26
 BbAa à BbZz = 26 + 26
 CcAa à CcZz = 26 + 26
 DdAa à DdZz = 26 + 26
 EeAa à EeZz = 26 + 26
 FfAa à FfZz = 26 + 26
 GgAa à GgEe = 14 + 14

$$\begin{array}{r} 26 \\ + 26 \\ + 26 \\ + 26 \\ + 26 \\ + 26 \\ + 14 \\ \hline 170 \end{array}$$

Monsieur Lordonné a rangés 170 dossiers

Lou et Charline

2) (b)

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 4 \\ \hline 104 \\ + 14 \\ \hline 118 \end{array}$$

Il a rangés 118 dossiers (c)

Alex et François

Aide à la lecture :

- (a) 1) Dans l'alphabet, il y a 26 lettres.
 A à Z=26
 AA à AZ=26 26
 BA à BZ=26 +26
 CA à CZ=26 +26
 DA à DZ=26 +26
 EA à EZ=26 +26
 FA à FZ=26 +26
 GA à GN=14 +14

170

Monsieur Lordonné a rangés 170 dossiers

Aide à la lecture :

- (b) 26+26+26+26+14=118
 (c) Il a rangés 118 dossiers